

JOURNAL INTERNATIONAL DE TECHNOLOGIE, DE L'INNOVATION,  
DE LA PHYSIQUE, DE L'ENERGIE ET DE L'ENVIRONNEMENT

## **Mesure de température pariétale en temps réel**

L. E. Brunet, J. Caillard, F. Mercier



**ISSN : 2428-8500**

**DOI : 10.18145/jitipee.v1i1.g48**

## Mesure de température pariétale en temps réel

L. E. Brunet<sup>(1)</sup>, J. Caillard<sup>(2)</sup>, F. Mercier<sup>(3)</sup>

<sup>(1)</sup> R&D Médiation, 71 av. de Lattre de Tassigny, 18000 Bourges, France

<sup>(2)</sup> MBDA France, Rond Point Marcel Henriot, 18000 Bourges, France

<sup>(3)</sup> Assystem, 97 Allée Borodine, 69000 Lyon, France

luc.brunet@insead.edu

**Résumé** – *Cet article présente une approche numérique simple et aisément implémentable en temps réel destinée à l'évaluation de températures pariétales dans des environnements thermiquement, chimiquement ou radiologiquement agressifs. La méthode décrite, évaluée sur une solution analytique connue de l'équation de la chaleur, présente également l'avantage de s'affranchir des variations des propriétés thermiques en fonction de la température.*

**Mots clés** : *Diffusion thermique, méthode inverse, mesure.*

**DOI** : [10.18145/jitipee.v1i1.g48](http://dx.doi.org/10.18145/jitipee.v1i1.g48)

### Introduction

La mesure de la température d'une paroi est souvent délicate, notamment lorsque cette surface est en contact avec un milieu extrême, tel qu'une flamme ou un gaz toxique. Pourtant, de la capacité à en déterminer l'état thermique dépend souvent la sécurité d'une installation ou d'un appareillage.

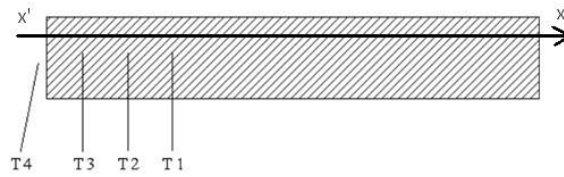
Les simulations numériques nécessitent la connaissance des caractéristiques thermiques du matériau [1], et notamment de la diffusivité thermique  $\alpha$  exprimée en  $m^2/s$  [2]. Des données tabulées sont disponibles dans la plupart des outils de calcul, mais ces derniers se heurtent à plusieurs approximations. Dans le matériau réel, du fait de sa fabrication, de son procédé d'assemblage, de son vieillissement, les caractéristiques thermiques peuvent être différentes des données idéales. La densité peut par exemple varier notablement selon les sources de matériaux. La mesure de la diffusivité thermique [3] sur des éprouvettes nécessite la fabrication de celles-ci et ajoute une charge expérimentale conséquente. Par ailleurs, les propriétés thermiques varient avec la température et l'état de dégradation mécanique du matériau.

Dans cet article, nous chercherons à déterminer la température pariétale sans utiliser de mesure préalable des propriétés thermiques. Pour cela, nous utiliserons un algorithme inverse par instrumentation à trois profondeurs dans la masse.

La validité et les limites de cette approche seront évaluées par comparaison avec une solution analytique connue dans le cas d'un signal de température surfacique triangulaire.

### 1. Formalisation du problème

Pour cet article, nous considérons le cas d'un cylindre semi-infini tel que représenté en Figure 1.



**Figure 1.** Cylindre semi-infini et points de mesure

Ce cylindre est instrumenté au moyen de thermocouple à trois profondeurs ( $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$ ) et l'objectif sera de déterminer la température  $T_4$  en fonction du temps et des trois mesures dans la masse. La conduction thermique dans le cylindre est décrite par l'équation de la chaleur qui, bien que simple, n'est solvable analytiquement que dans un nombre limité de cas [4].

Son expression différentielle est reprise en équation (1) sous sa forme monodimensionnelle [5].

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{1}$$

La méthode des différences finies permet une discrétisation de cette équation selon un indice dimensionnel  $i$  et une discrétisation temporelle  $t$  en exposant. L'équation (2) en reprend l'expression générale [6][7].

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta x^2} [\lambda(T_{i+1}^{n+1} - 2T_i^{n+1} + T_{i-1}^{n+1}) + (1 - \lambda)(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)] \tag{2}$$

$\lambda$  représente le degré d'implicité du modèle avec  $\lambda = 0$  pour un schéma purement explicite,  $\lambda = 1$  pour un schéma implicite et  $\lambda = 1/2$  pour un schéma de Cranck-Nicholson.

Dans le modèle ici proposé, la représentation sera simplifiée par les variables suivantes :

$$\beta = \frac{\alpha \Delta t}{\Delta x^2} \tag{3}$$

$$\theta_i = T_i^{n+1} + T_i^n \tag{4}$$

$$\bar{\theta}_i = T_i^{n+1} - T_i^n \tag{5}$$

et l'équation (2) devient donc pour  $\lambda = 1/2$

$$-2\beta\theta_i + \beta\theta_{i-1} + \beta\theta_{i+1} = 2\bar{\theta}_i \tag{6}$$

Dans l'équation (6), les variables sont  $\beta$  et  $\theta_4$  et nous chercherons à les calculer à partir du système suivant :

$$\begin{cases} -2\beta\theta_2 + \beta\theta_1 + \beta\theta_3 = 2\bar{\theta}_2 \\ -2\beta\theta_3 + \beta\theta_4 + \beta\theta_2 = 2\bar{\theta}_3 \end{cases} \quad (7)$$

Ce schéma numérique est stable et précis au second ordre et la température pariétale ne dépend alors que des mesures temporelles des trois températures de masse. La Figure 2 représente ce schéma numérique.

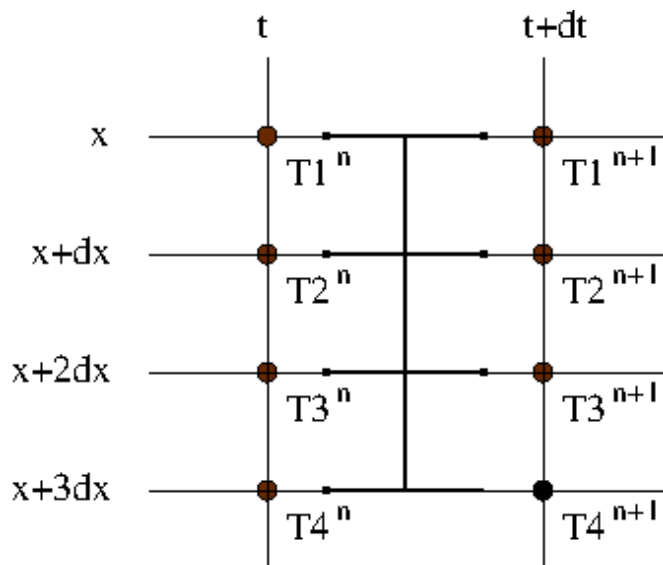


Figure 2. Température T4 calculée à partir de sept températures

Il correspond à un schéma inverse [8][9].

Le modèle peut être étendu au cas des sondes non équidistantes, mais le modèle doit alors évoluer d'une méthode de Cranck-Nicholson vers un modèle purement implicite [10][11][12].

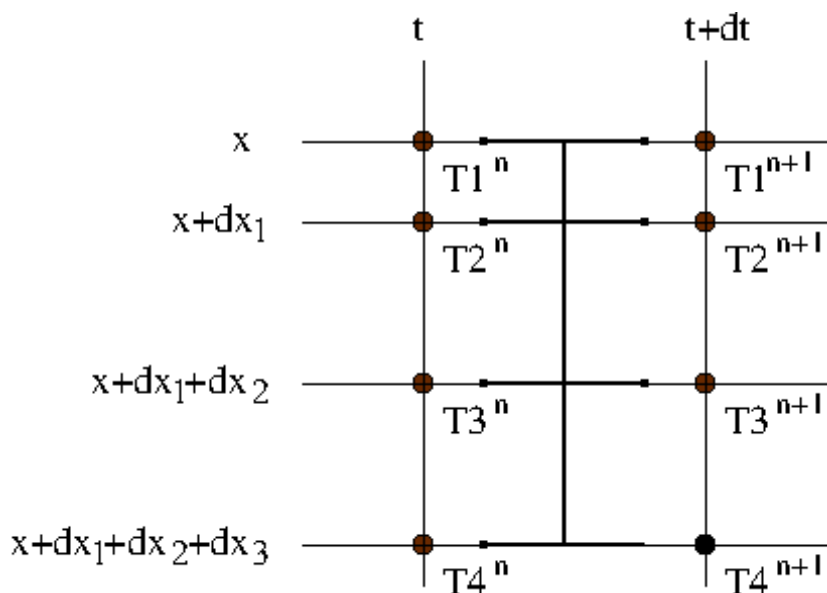


Figure 3. Schéma implicite, dans le cas de sondes non équidistantes.

L'équation suivante en présente la généralisation.

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} = \alpha \left[ \lambda \left( \frac{T_{i+1}^{n+1}}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)(\Delta x_i)} - 2 \frac{T_i^{n+1}}{(\Delta x_{i-1} \cdot \Delta x_i)} + \frac{T_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)(\Delta x_{i-1})} \right) + \right. \\ \left. (1 - \lambda) \left( \frac{T_{i+1}^n}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)(\Delta x_i)} - 2 \frac{T_i^n}{(\Delta x_{i-1} \cdot \Delta x_i)} + \frac{T_{i-1}^n}{(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)(\Delta x_{i-1})} \right) \right]$$

$$\bar{\Theta}_2 = \beta' \left( \frac{\Theta_3}{(\Delta x_1 + \Delta x_2)\Delta x_2} - \frac{\Theta_2}{\Delta x_1 \Delta x_2} + \frac{\Theta_1}{(\Delta x_1 + \Delta x_2)\Delta x_1} \right)$$

$$\bar{\Theta}_{23} = \beta' \left( \frac{\Theta_4}{(\Delta x_2 + \Delta x_3)\Delta x_3} - \frac{\Theta_3}{\Delta x_2 \Delta x_3} + \frac{\Theta_2}{(\Delta x_2 + \Delta x_3)\Delta x_2} \right) \quad (8)$$

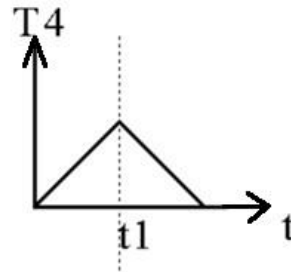
$$\beta' = \alpha \Delta t$$

$$\theta_i = 2\lambda T_i^{n+1} + 2(1 - \lambda)T_i^n$$

$$\bar{\theta}_i = T_i^{n+1} - T_i^n$$

## 2. Validation par une solution analytique

Parmi les solutions analytiques instationnaires de l'équation de la chaleur, l'une d'entre elles concerne une sollicitation thermique triangulaire telle que représentée en Figure 4 [4].



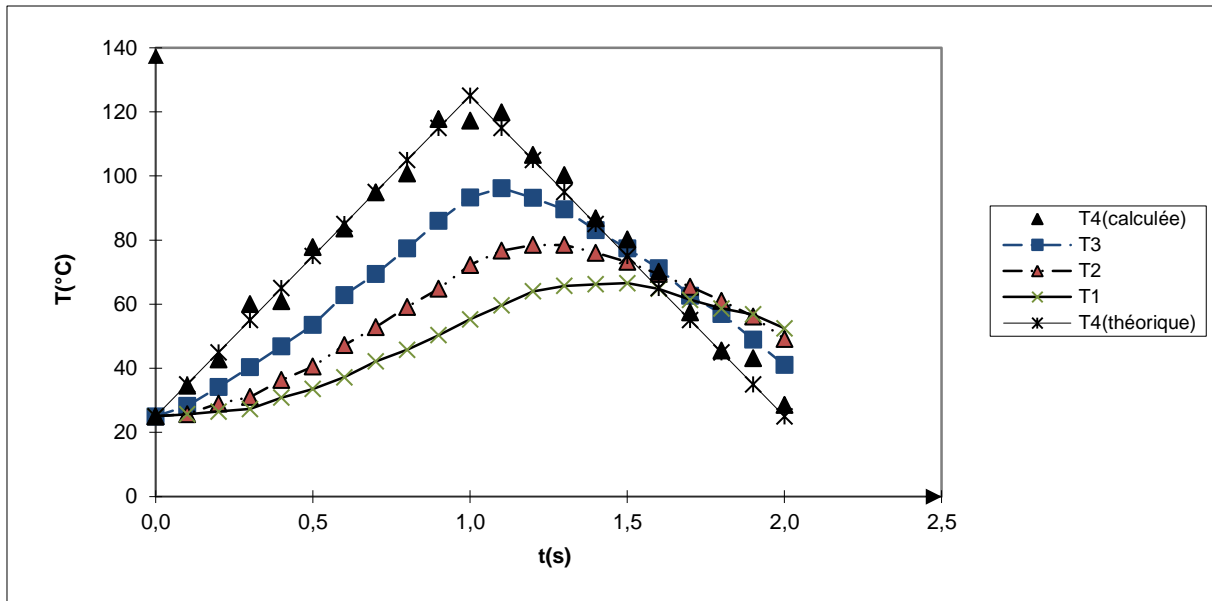
**Figure 4.** Cas test à partir d'une solution analytique

La solution est alors représentée en équation (9) lors de la montée en température. Elle devient  $-2\Gamma(t - t_1) + A$  lors de la redescente [4]

$$\Gamma(t) = \frac{T - T_0}{T_{max} - T_0} = At \left[ \left( 1 + \frac{x^2}{2\alpha t} \right) \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{\alpha t}} e^{-\xi^2} d\xi \right) - \frac{x}{\sqrt{2\alpha\pi t}} e^{-x^2/4\alpha t} \right] \quad (9)$$

avec  $T_0$  la température initiale homogène du solide,  $T_{max}$  la température maximale de l'échelon et  $A$  la pente.

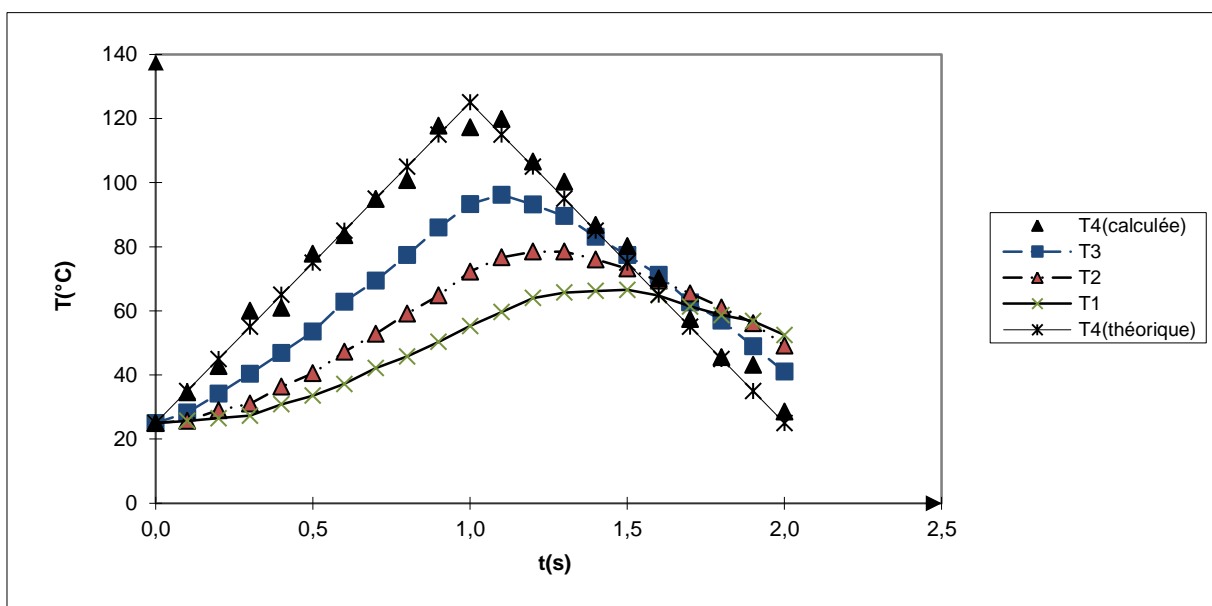
La Figure 5 représente la simulation pour une diffusivité thermique de  $10^{-5}$  m<sup>2</sup>/s et une distance de 1mm entre les sondes.



**Figure 5.** Comparaison numérique/analytique avec  $\beta=1$

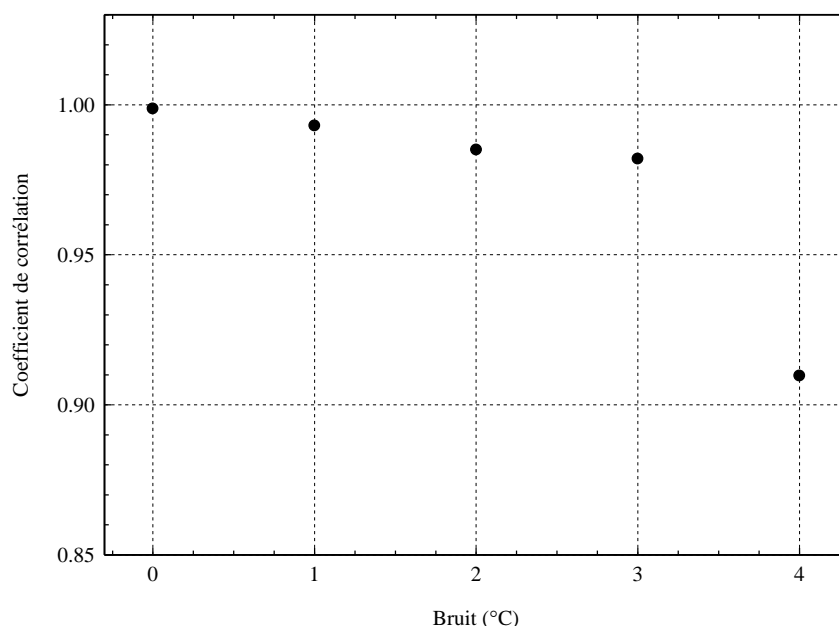
On observe que la température T4 calculée présente la meilleure corrélation avec la solution analytique dans le cas d'un coefficient d'implicité de 0,55 légèrement supérieur au coefficient de Cranck-Nicholson.

La sensibilité au bruit est relativement faible dans cette configuration, tant que celui-ci ne dépasse pas  $\pm 1^\circ\text{C}$  sur chacune des voies de mesure (Figure 6).



**Figure 6.** Effet du bruit sur la précision du modèle ( $2^\circ\text{C}$ )

La Figure 7 montre l'influence de l'amplitude du bruit sur le coefficient de corrélation entre le modèle analytique et le modèle numérique.



**Figure 7.** Effets du bruit sur la reproduction du signal d'entrée

Le bruit est généré aléatoirement sur chacune des températures mesurées avec l'amplitude en abscisse. Le coefficient de corrélation est celui obtenu à partir de la température pariétale théorique non bruitée et les données calculées à partir du signal bruité.

### Conclusion

Les principaux avantages de cette approche sont de libérer l'expérimentateur de l'acquisition bibliographique ou expérimentale des paramètres thermiques, d'être indépendant des évolutions de ceux-ci en fonction de la température et de permettre une acquisition temps réel avec un calcul suffisamment simple pour être intégré directement sur le site de mesure.

Le modèle présente une excellente corrélation avec les solutions connues. Toutefois, il présuppose que les distances intersondes sont constantes ce qui n'est pas forcément une approximation acceptable dans le cas de thermocouples proches les uns des autres. La méthode serait toutefois généralisable à des matériaux subissant des déformations, par exemple en y intégrant une télémétrie.

### Références

- [1] Alifanov, O. M. (1994), *Inverse Heat Transfer Problems*, Springer Verlag.
- [2] Özisik N.M., *Heat Transfert*, Mc Graw Hill, pp 156-224, (1985).
- [3] Brunet, L., Lombard, J-M., Morand P., Blaise P. (1995), *Mesure expérimentale de la diffusivité thermique des matériaux énergétiques en régime instationnaire*, Congrès International de pyrotechnie, EUROPYRO, vol. 6, pp 403-412.
- [4] De Vriendt A.B. (1982), *La transmission de la chaleur*, Gaetan Morin Editeur, vol. 1, tome 1, pp 102-106.
- [5] Beck, JV (1970), *Non linear estimation applied to the non linear inverse heat conduction problem*, International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 13, pp 703-716. doi:10.1016/0017-9310(70)90044-X

- [6] Beck JV, Blackwell B, St Clair C.R (1985), *Inverse heat conduction, Ill posed problems*, Wiley Science, NY, 308 p.
- [7] Hensel E (1991), *Inverse theory and application for engineers*, Prentice Hall, New Jersey, 321 p.
- [8] Raynaud, M, *Le problème inverse de la conduction de la chaleur*, Techniques de l'ingénieur, BE 8 265.
- [9] Raynaud M, Bransier J (1986), *A new finite difference method for non linear inverse heat conduction problem*, Numerical Heat Transfer, vol. 9, n°1, pp 27-42. doi : 10.1080/10407788608913463
- [10] Fuhrer, O. (March 2000), *Inverse Heat Conduction In Soils*, ETH Zürich, Dept. Physics, Thèse.
- [11] Konstantyn B. Isayev (2000), *Research of thermal conductivity of different materials by solving of heat conduction inverse problems* , 4<sup>th</sup> International conference on inverse problems in engineering, Rio.
- [12] Lam, T. T., and W. K. Yeung (1995), *Inverse determination of thermal conductivity for one-dimensional problems*, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, vol. 9, pp 335-344. doi: 10.2514/3.665