

JOURNAL INTERNATIONAL DE TECHNOLOGIE, DE L'INNOVATION,
DE LA PHYSIQUE, DE L'ENERGIE ET DE L'ENVIRONNEMENT

Étude de la stabilité de la méthode de différences finies en dynamique des systèmes mécaniques linéaires discrets

T. Kanyiki, F. Ntambwe, J. P. Katond



ISSN : 2428-8500

DOI : 10.18145/jitipee.v6i1.226

Étude de la stabilité de la méthode de différences finies en dynamique des systèmes mécaniques linéaires discrets

Trésor Kanyiki⁽¹⁾, François Ntambwe⁽¹⁾, Jean Paul Katond⁽¹⁾

(1) Département d'électromécanique/Faculté polytechnique/Université de Lubumbashi,
République démocratique du Congo
tresorkanyiki@gmail.com

Résumé – *l'objectif de cette étude est d'analyser la stabilité de la méthode de différences finies centrées en dynamique des systèmes mécaniques discrets linéaires. La simulation du comportement dynamique des systèmes mécaniques discrets linéaires est une étape qui consiste à résoudre les équations différentielles qui décrivent le comportement dynamique des systèmes mécaniques discrets linéaires. Cet article présente une approche basée sur le graphique des valeurs propres de la matrice d'amplification de l'opérateur d'intégration pour choisir le pas d'intégration à utiliser pour résoudre les équations différentielles par la méthode de différences finies. Les résultats obtenus à partir de la méthode de différences finies sont comparés à ceux obtenus à l'aide de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4.*

Mots clés : systèmes mécaniques discrets linéaires, différences finies centrées, stabilité, Runge Kutta d'ordre 4.

DOI : 10.18145/jitipee.v6i1.226

Introduction

Dans la mécanique, la dynamique peut se prévaloir d'une place particulièrement importante dans la conception et la réalisation des systèmes mécaniques. De tout temps, l'ingénieur a cherché à comprendre les lois régissant les mouvements des corps qui l'entourent [1]. Ainsi, il a développé plusieurs théories lui permettant d'analyser les mouvements des corps. Les étapes essentielles à la maîtrise et la connaissance de tout système mécanique sont : l'observation, la compréhension, la modélisation et la simulation [4]. Plusieurs outils mathématiques existent pour modéliser le comportement dynamique d'un système mécanique, on peut citer : les équations de Lagrange, de Hamilton, les lois de Newton, les lois d'Euler, ... ; quel que soit l'approche utilisée, les équations différentielles obtenues permettent de prédire le comportement dynamique du système mécanique. La simulation consiste à résoudre les équations différentielles. Ces équations sont complexes et difficiles à résoudre manuellement, surtout lorsque le système possède plusieurs degrés de liberté [5]. Les méthodes numériques deviennent incontournable, et grâce au développement du calcul informatique ; elles peuvent

être implantées dans le logiciel informatique. La méthode de différences finies est depuis longtemps utilisée pour la résolution des équations différentielles ordinaire de deuxième ordre, notamment l'équation de la propagation de la chaleur [4]. Dans ce contexte, le choix du pas d'intégration détermine la qualité des résultats, plus le pas est petit meilleurs est le résultat obtenu mais les nombres d'équations algébriques augmentent [4]. Lorsque cette méthode est utilisée en dynamique de systèmes mécaniques discrets linéaires, le choix du pas d'intégration est crucial car le schéma d'intégration risque d'être instable. Dans l'ouvrage [1], on définit la manière de choisir le pas d'intégration à partir des fréquences naturelles du système mécanique discret. Cette approche devient fastidieux lorsque le système possède plusieurs degrés de liberté ; il devient difficile voir compliqué de trouver le pas d'intégration. Notre article consiste à présenter une approche simple par rapport au précédent afin de choisir le pas d'intégration lorsqu'on utilise la méthode de différences finies pour résoudre numériquement les équations différentielles des systèmes mécaniques linéaires discrets. Dans [3], on introduit la notion de la matrice d'amplification de l'opérateur d'intégration d'un système mécanique discrets linéaires et dans [2], on utilise la notion de la trace de la matrice d'amplification pour étudier la stabilité du schéma de Newmark. Notre démarche pour choisir le pas d'intégration est une combinaison des travaux [2] et [3]. Elle consiste à choisir le pas d'intégration à partir des graphiques des valeurs propres de la matrice d'amplification de l'opérateur d'intégration. Les résultats obtenus avec la méthode de différences finies centrées sont comparés à ceux obtenus avec la méthode de Runge d'ordre 4. Les deux méthodes sont programmées dans un logiciel de calcul matriciel.

1. Dynamique des systèmes mécaniques discrets linéaires

Pour effectuer l'analyse vibratoire en dynamique, l'ingénieur réalise la modélisation d'un système complexe afin d'en effectuer la résolution. Eu égard de la modélisation des phénomènes physiques, on peut distinguer deux grandes approches : l'approche discrète et l'approche continue [7]. Pour l'approche continue, la modélisation est liée à la géométrie réelle des structures que l'on suppose comme un milieu continu. Il y a des solutions analytiques si la géométrie est simple ; on recourt à une résolution numérique si la structure est complexe [4]. La méthode numérique la plus utilisé est la méthode des éléments finis. Elle permet de créer des modèles proches de la géométrie réelle par rapport à l'approche discrète. Son inconvénient est double : le temps d'exécution des calculs informatiques est parfois long et sa mise en œuvre est laborieuse [1]. De plus, les résultats obtenus doivent être validés afin de vérifier le bien-fondé des hypothèses utilisées [5]. L'approche discrète est utile car sa mise en œuvre est simple et sa résolution numérique est généralement rapide [4]. Ainsi cet article s'intéresse à la résolution des modèles obtenus par l'approche discrète notamment à la méthode de différences finies centrées. Cependant, dans l'approche discrète, il y a passage d'une réalité continue à un modèle composé d'éléments discrets (masses, ressorts et amortisseurs.) [4]. L'interprétation des résultats obtenus doit être réalisé avec précaution et la validation des résultats en regard des phénomènes physiques est toujours nécessaire.

1.1 Modélisation d'un système mécanique

Les points suivants sont pris en compte dans la conception d'un système mécanique [8] :

- Passage du système réel à celui discret ou modélisé ; sans oublier que les forces d'excitation ne font pas partie du modèle structural.
- Nombre de degré de liberté : il permet de représenter le phénomène à étudier. Le choix du nombre de degré de liberté dépend du concepteur essentiellement, il est fonction du niveau de la précision qu'il veut attribuer à son modèle. Le nombre des fréquences de résonance est égal au nombre de degré de liberté.

Le nombre de degrés de liberté d'un système mécanique est le nombre minimal de paramètres indépendants nécessaire pour établir intégralement et en tout temps les coordonnées de chaque points du système mécanique. Se basant sur cette définition, le système continu possède une infinité de degrés de liberté.

- Les éléments requis : pour construire le modèle on a besoin des masses, des raideurs et des amortisseurs. Toute structure peut être modélisée par des éléments discrets de masses, de ressorts et d'amortisseurs.

1.2. Discrétisation des systèmes

La discrétisation est une étape qui consiste à effectuer le passage du système réel au système discret ou modélisé par le biais d'éléments discrets (masse, ressort, amortisseur) en rotation, translation ou bien les deux à la fois [1]. L'annexe A rappelle le passage de différents éléments réels aux éléments discrets. Une fois le système discret obtenu et pour ce qui concerne l'étude dynamique, on applique les lois de Newton, de Lagrange, ... afin d'aboutir aux équations différentielles qui établissent un lien entre les sollicitations et les réactions qui en découlent [8]. La résolution numérique est une étape fondamentale car elle permet de prédire le comportement dynamique du système à étudier. La stabilité des méthodes de résolution est d'une importance cruciale. De plus, ces méthodes doivent converger vers une solution physique acceptable. Cet article s'intéresse à la stabilité de la méthode de différences finies centrées [8].

2. Méthode de différences finies en dynamique de systèmes mécaniques discrets linéaires

L'annexe B présente un développement analytique de la méthode de différences finies en dynamique de l'ingénieur. L'algorithme de Newmark permet de calculer le déplacement et la vitesse des systèmes mécanique linéaires discrets à l'instant t_{n+1} à l'aide des formules suivantes [3] :

$$\begin{aligned}\dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + (1-\gamma)h\ddot{q}_n + \gamma h\ddot{q}_{n+1} \\ q_{n+1} &= q_n + h\dot{q}_n + h^2\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\ddot{q}_n + h^2\beta\ddot{q}_{n+1}\end{aligned}\quad (1)$$

Notre étude se porte sur les systèmes discrets linéaires c'est-à-dire que les matrices M, C et K sont indépendants de q , les équations d'équilibre dynamique s'écrivent comme suit :

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = p(t) \quad (2)$$

La méthode de différences finies centrées est obtenue à partir de l'algorithme de Newmark en posant $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = 0$ [3]. Comme démontré dans l'annexe B, les relations (1) conduisent aux expressions suivantes de l'accélération et de la vitesse :

$$\ddot{q}_n = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} \quad (3)$$

$$\dot{q}_n = \frac{1}{2h}(q_{n+1} - q_{n-1}) \quad (4)$$

2.1. Stabilité de la méthode de différences finies

Un schéma d'intégration est stable s'il existe un pas d'intégration h_0 supérieur à zéro tel que pour tout $h \in [0, h_0]$, une perturbation finie du vecteur d'état à l'instant t_n entraîne une modification non croissante du vecteur u_{n+j} calculé à un instant ultérieur t_{n+j} . Écrivons les équations du mouvement aux temps t_n et t_{n+1} afin de discuter de la stabilité de l'opérateur d'intégration défini par les relations (1) [3].

$$\begin{aligned} M\ddot{q}_n &= -C\dot{q}_n - Kq_n + p_n \\ M\ddot{q}_{n+1} &= -C\dot{q}_{n+1} - Kq_{n+1} + p_{n+1} \end{aligned} \quad (5)$$

En tenant compte de la relation (5) et en multipliant les relations (1) par M , nous obtenons les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} M\dot{q}_{n+1} &= M\dot{q}_n + h(1-\gamma)[-C\dot{q}_n - Kq_n + p_n] + \gamma h[-C\dot{q}_{n+1} - Kq_{n+1} + p_{n+1}] + \gamma h[-C\dot{q}_{n+1} - Kq_{n+1} + p_{n+1}] \\ Mq_{n+1} &= Mq_n + hM\dot{q}_n + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2[-C\dot{q}_n - Kq_n + p_n] + \beta h^2[-C\dot{q}_n - Kq_n + p_n] + \beta h^2[-C\dot{q}_{n+1} - Kq_{n+1} + p_{n+1}] \end{aligned}$$

Que l'on met sous forme matricielle

$$u_{n+1} = A(h)u_n + g(h)_{n+1} \quad (6)$$

Avec

$$\begin{aligned} A(h) &= H_1^{-1}(h)H_0(h) \\ g_{n+1} &= H_1^{-1}(h)b_{n+1}(h) \\ H_1 &= \begin{bmatrix} M + \gamma h C & \gamma h K \\ \beta h^2 C & M + \beta h^2 K \end{bmatrix} \\ H_0 &= - \begin{bmatrix} (1-\gamma)hC - M & (1-\gamma)hK \\ \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2 C - hM & \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2 K - M \end{bmatrix} \\ b_{n+1} &= \begin{bmatrix} (1-\gamma)hP_n + \gamma hP_{n+1} \\ \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2 p_n + \beta h^2 p_{n+1} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

La matrice $A(h)$ est la matrice d'amplification de l'opérateur d'intégration, elle est de l'ordre $2N \times 2N$, où N est le nombre de degrés de liberté.

Soit une perturbation dans les conditions initiales :

$$\delta u_0 = u_0' - u_0 \quad (8)$$

Pour la solution non perturbée, on obtient successivement :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= Au_n + g_{n+1} \\ &= A^2 u_{n-1} + Ag_n + g_{n+1} \\ &= A^3 u_{n-2} + A^2 g_{n-1} + Ag_n + g_{n+1} \\ &\vdots \\ &= A^{n+1} u_0 + \sum_{j=0}^{n+1} A^{n-j+1} g_j \end{aligned} \quad (9)$$

De même, pour la solution perturbée, nous obtenons :

$$u_{n+1}' = A^{n+1} u_0' + \sum_{j=0}^{n+1} A^{n-j+1} g_j \quad (10)$$

L'effet de la perturbation initiale à l'instant t_{n+1} est calculé par soustraction

$$\delta u_{n+1} = A^{n+1} \delta u_0 \quad (11)$$

Notons par λ_r les solutions du problème aux valeurs propres

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (12)$$

Et $X_{(s)}$ les vecteurs propres correspondants. Ensuite développons δu_0 en série de modes

$$\delta u_0 = \sum_{s=1}^{2N} a_s X_s \quad (13)$$

La relation de récurrence (11) prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta u_{n+1} &= A^{n+1} \sum_{s=1}^{2N} a_s X_s \\ &= \sum_{s=1}^{2N} a_s \lambda_s^{n+1} X_s \end{aligned}$$

En divisant l'équation (6) par M , la matrice d'amplification devient :

$$A(h) = \begin{bmatrix} 1 - \gamma h \frac{C}{M} & \gamma h \frac{K}{M} \\ \beta h^2 C & 1 + \beta h^2 \frac{K}{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - (1 - \gamma) h \frac{C}{M} & -(1 - \gamma) h \frac{K}{M} \\ h - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \frac{C}{M} & 1 - \left(\frac{1}{2} - \beta\right) h^2 \frac{K}{M} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Appelons ε est le coefficient d'amortissement, pour un amortissement symétrique, $\varepsilon = \frac{C}{2M\omega}$

. Sachant qu'il s'agit de la méthode de différences finies centrés, $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ et nous savons

que $\omega^2 = \frac{K}{M}$ et $\frac{C}{M} = 2\varepsilon\omega$; la relation (14) devient :

$$A(h) = \begin{bmatrix} 1 + \varepsilon h \omega & \frac{h \omega^2}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 - \varepsilon h \omega & -\frac{h \omega^2}{2} \\ h - \varepsilon h^2 \omega & 1 - \frac{h^2 \omega^2}{2} \end{bmatrix} \quad (15)$$

L'équation caractéristique de la matrice $A(h)$ est donné par :

$$(1 + \varepsilon h \omega) \lambda^2 - (2 - h^2 \omega^2) \lambda + h^2 \omega^2 \left(1 - \frac{h^2 \omega^2}{2}\right) (1 - \varepsilon h \omega) = 0 \quad (16)$$

Les valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = \frac{2 - h^2 \omega^2 + \sqrt{(2 - h^2 \omega^2)^2 - 4h^2 \omega^2 \left(1 - \frac{h^2 \omega^2}{4}\right) (1 - \varepsilon^2 h^2 \omega^2)}}{2(1 + \varepsilon h \omega)} \quad (17)$$

$$\lambda_2 = \frac{2 - h^2 \omega^2 - \sqrt{(2 - h^2 \omega^2)^2 - 4h^2 \omega^2 \left(1 - \frac{h^2 \omega^2}{4}\right) (1 - \varepsilon^2 h^2 \omega^2)}}{2(1 + \varepsilon h \omega)} \quad (18)$$

En considérant $h\omega$ comme variable, on peut tracer les valeurs propres en fonction de $h\omega$ afin de trouver le pas h qui permet d'obtenir une solution convergente du système d'équation différentielles dynamique.

La Figure 1, tracé avec Matlab, illustre les courbes propres $\lambda_1(h\omega)$ et $\lambda_2(h\omega)$ pour $\varepsilon = 0.02$.

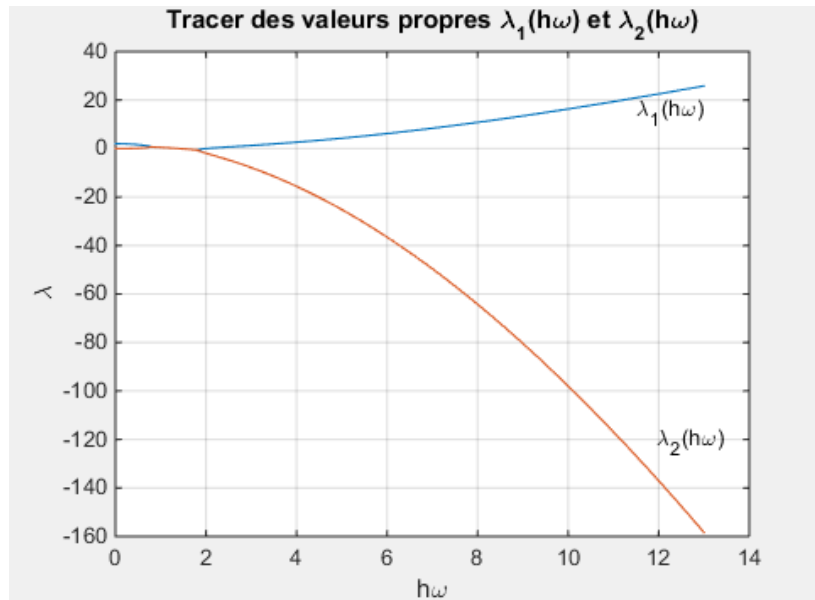


Figure 1 : Tracer des valeurs propres.

3. Application numérique

Nous considérons deux exemples de système mécanique discret linéaire, l'un simple et l'autre complexe. La stabilité et l'instabilité de la méthode numérique de différences finies sont comparées à la méthode numérique de Runge Kutta d'ordre 4 rappelé en annexe B.

Considérons le système mécanique discret linéaire à deux degrés de liberté (Figure 2).

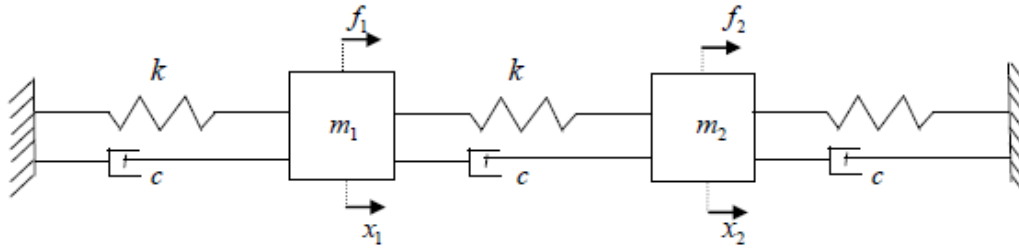


Figure 2 : système discret à deux degrés de liberté

Sur la Figure 2 les masses $m_1 = 0.5 \text{ kg}$; $m_2 = 0.5 \text{ kg}$, la rigidité $k = 5 \text{ N/m}$, le coefficient d'amortissement $c = 2 \text{ kg/s}$. les positions et vitesses initiales des masses sont nulles. En appliquant le théorème énergétique de Lagrange sur le système de la Figure 2, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2c & -c \\ -c & 2c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

En appliquant sur les masses, les forces constantes $f_1 = 0.5 \text{ N}$ et $f_2 = 2.9 \text{ N}$, nous traçons le graphique des valeurs propres en fonction de $h\omega$ afin de calculer le pas d'intégration. Nous savons que $\varepsilon = \frac{c}{2\omega m}$, avec $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{10}$ d'où $\varepsilon = 0,6325$.

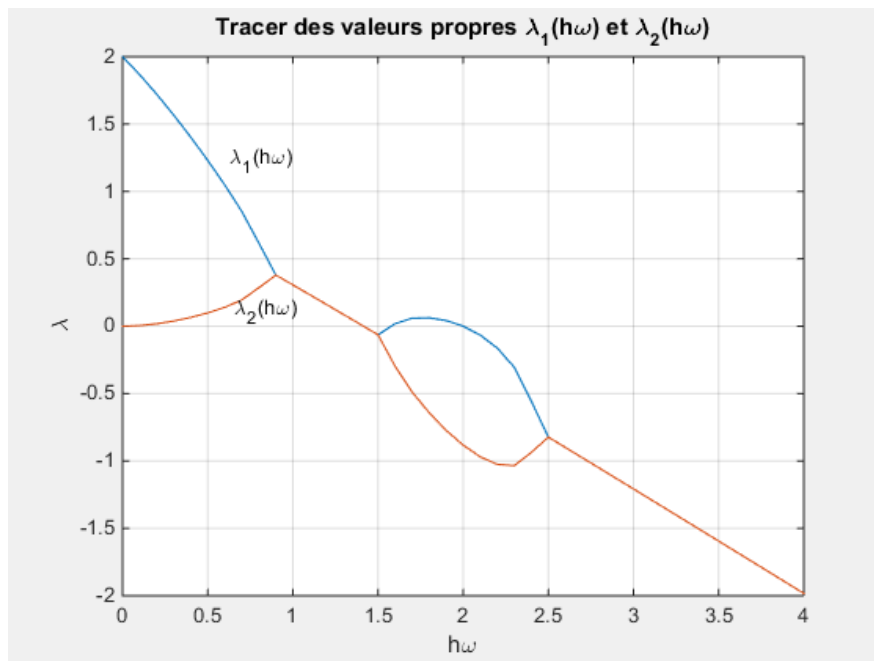


Figure 3 : variation des valeurs propres en fonction de $h\omega$.

À partir de la Figure 3, nous déterminons le pas d'intégration h . Prenons $\omega h = 0.9$, Ce qui implique que $h = \frac{0,9T_0}{2\pi}$. La période $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; ainsi $T_0 = 2\pi\sqrt{0,1}$ alors $h = 0,285$. La méthode Runge Kutta d'ordre 4 et celle de différences finies sont programmées sous Matlab®, avec un pas $h = 0,285$; nous obtenons les figures suivantes :

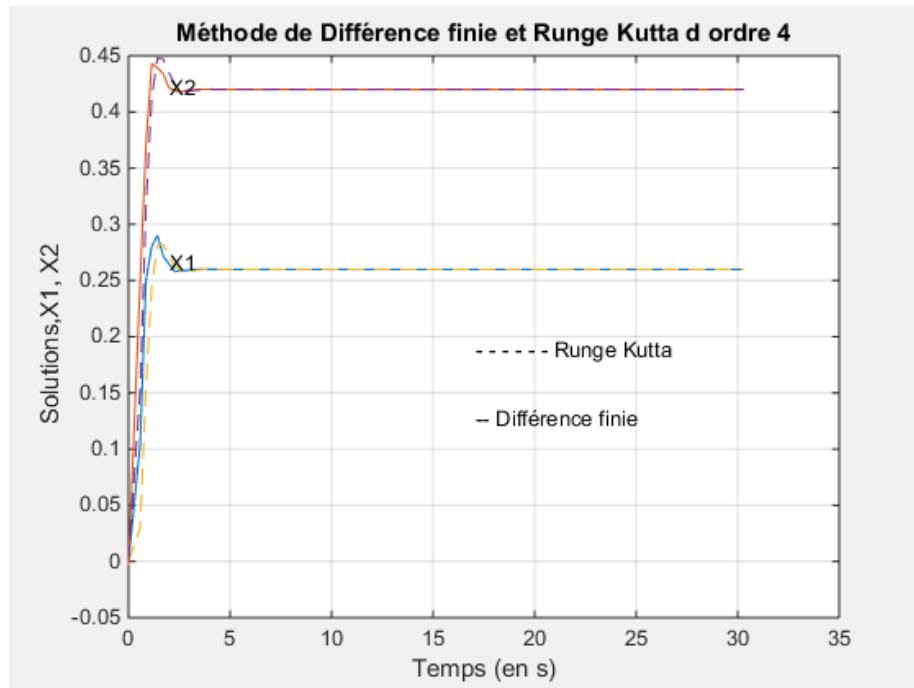


Figure 4 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 .

Lorsqu'on applique la force de 0,5 N sur la masse m_1 et 2,9 N sur la masse m_2 ; nous voyons sur la Figure 4 qu'après environ 3 secondes, les deux masses restent figées; m_1 à 0,26 m de la position initiale et m_2 à 0,425 m de la position initiale. Les courbes qui représentent les trajectoires des masses m_1 et m_2 obtenues à l'aide de la méthode de Runge Kutta suivent à peu près la même allure que celles obtenues à l'aide de la méthode de différences finies. Pour observer plus aisément les courbes obtenues à l'aide de la méthode de Runge Kutta et de différences finies, nous considérons les trajectoires des courbes après 4 secondes (Figure 5).

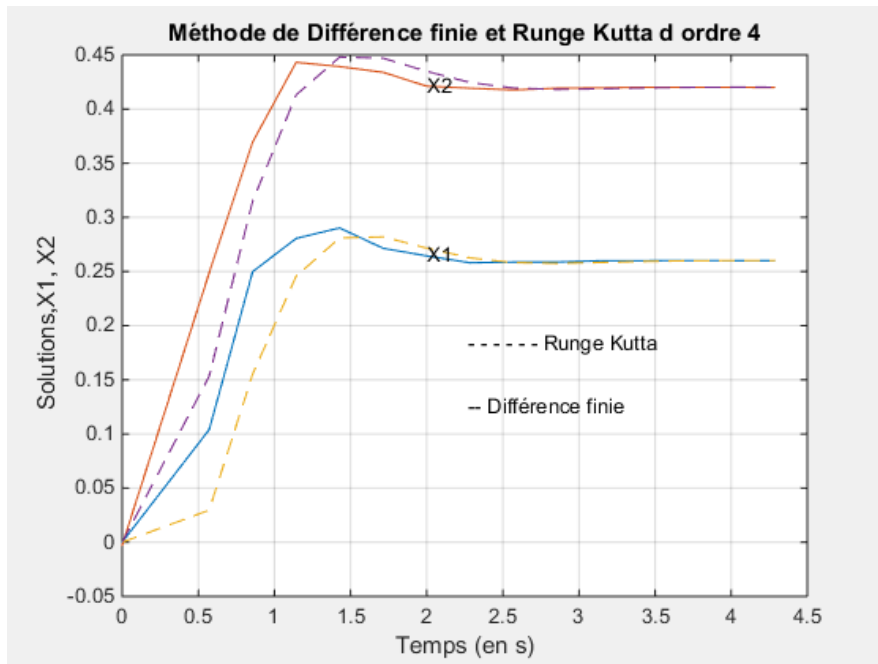


Figure 5 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 .

Utilisons ensuite un autre pas d'intégration (Figure 3), nous considérons $\omega h = 0,45$ ce qui conduit à : $h = 0,1423$.

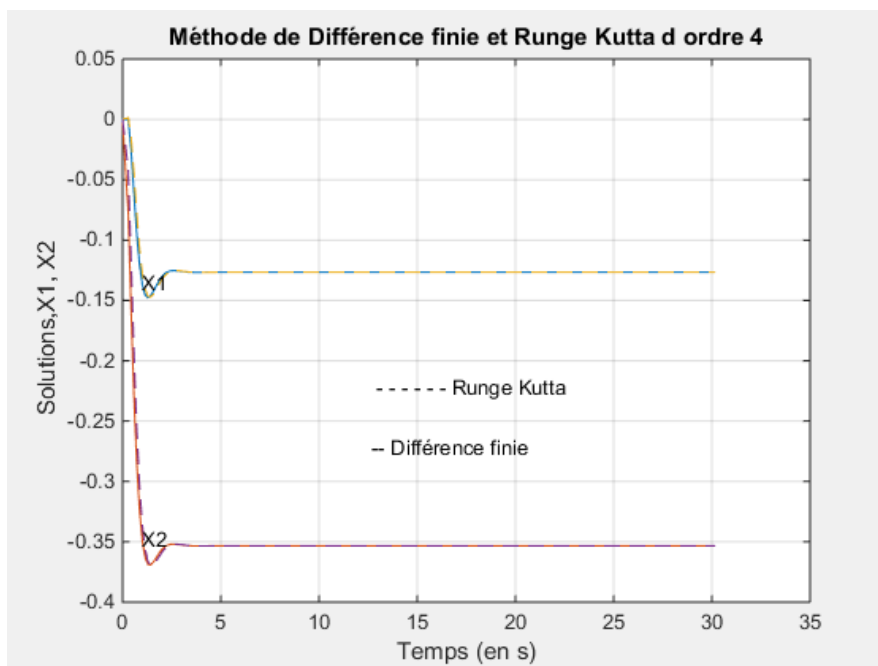


Figure 6 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 .

La Figure 6 illustre les trajectoires des masses m_1 et m_2 à l'aide de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 et de différences finies. Mais pour $f_1 = 0,5$ N et $f_2 = -2,9$ N. les deux masses se dirigent à gauche (de leurs positions initiales) car la force f_2 est largement supérieure à f_1 (alors que les deux masses sont identiques). La masse m_1 devient statique à $-0,125$ m de la position et m_2 à $-0,35$ m de sa position initiale.

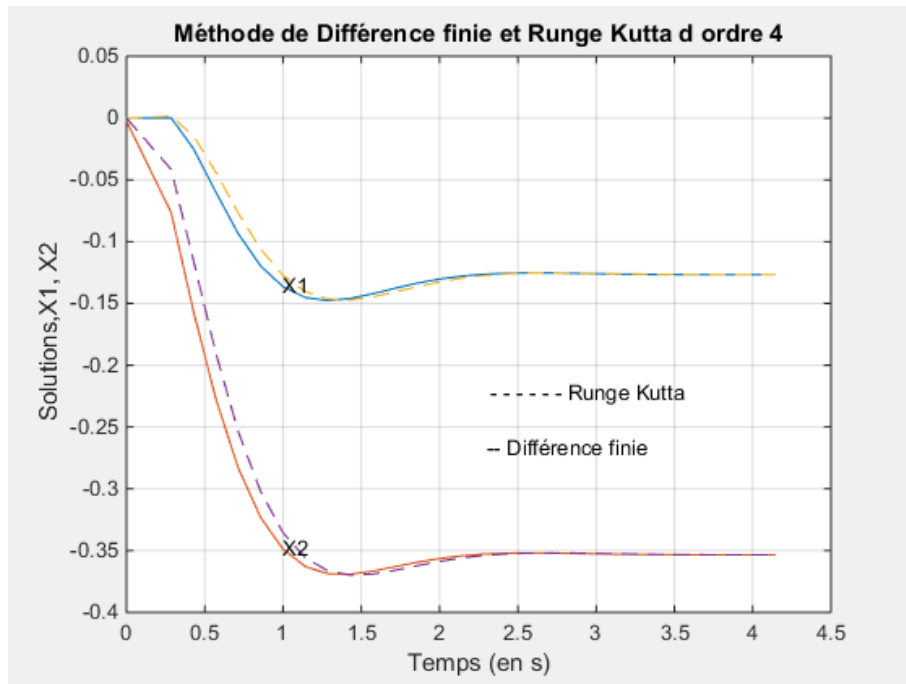


Figure 7 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 .

La Figure 7 illustre les trajectoires de m_1 et m_2 après 4 secondes. Considérons maintenant pour la Figure 8, $\omega h = 2$, ce qui conduit au pas d'intégration $h = 0,6325$ (nous avons utilisé $f_1 = 0,5$ N et $f_2 = 2,9$ N).

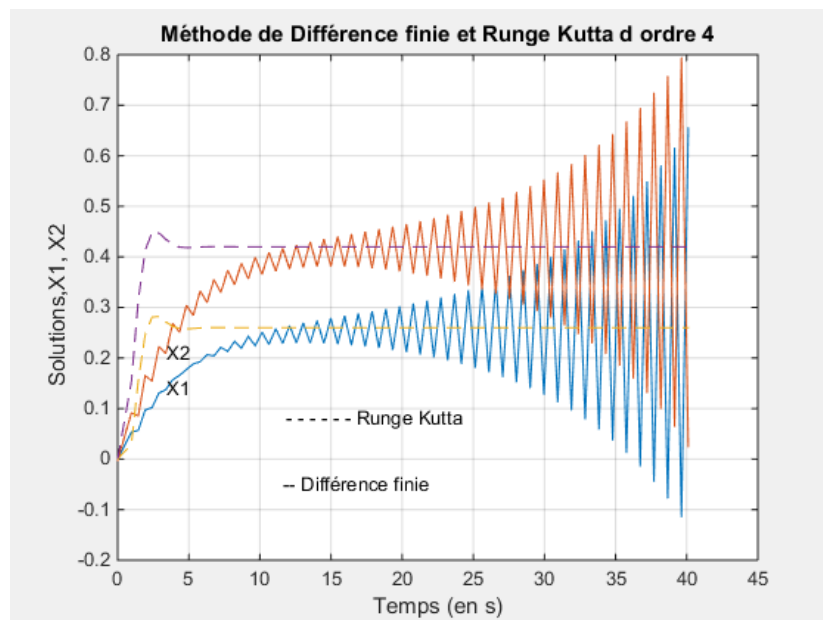


Figure 8 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 .

On voit sur la Figure 8 que la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 conduit à un résultat stable mais la méthode de différences finies conduit à un résultat instable. Les résultats obtenus avec la méthode de différences finies ne sont pas exactes, car après 3 secondes les deux masses deviennent statiques. Nous voyons que les deux masses continuent à osciller indéfiniment, à partir de 33 secondes, la masse m_1 oscille autour de sa position initiale, ce qui ne peut pas

s'expliquer car la force qui est appliquée sur m_2 est supérieure à f_1 . Étudions maintenant les trajectoires de m_1 et m_2 après 5 secondes (Figure 9).

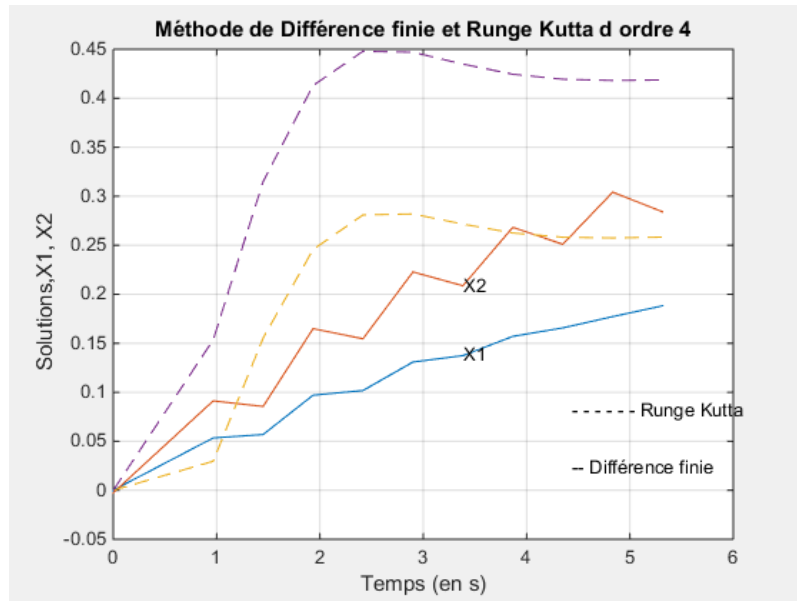


Figure 9 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 .

À l'aide de la figure 3, nous prenons $\omega h = 3$, alors $h = 0,9487$

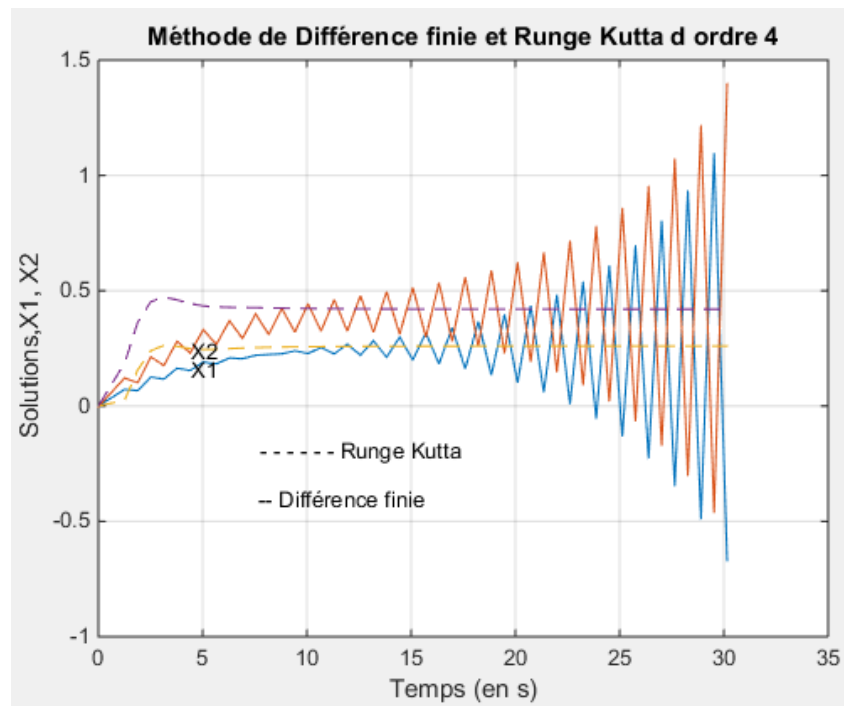


Figure 10 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 .

Il est clair sur la Figure 10, que la méthode de différences finies est instable, alors que la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 est stable. Concernant les résultats obtenus à l'aide de la méthode de différences finies, à partir de 15 secondes, les deux masses commencent à osciller indéfiniment autour de leurs positions d'équilibre alors que le système est amorti.

La Figure 11 illustre une comparaison de deux graphiques, celui de la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 et celui de différences finies centrées, nous voyons que la méthode de différences finies est instable.

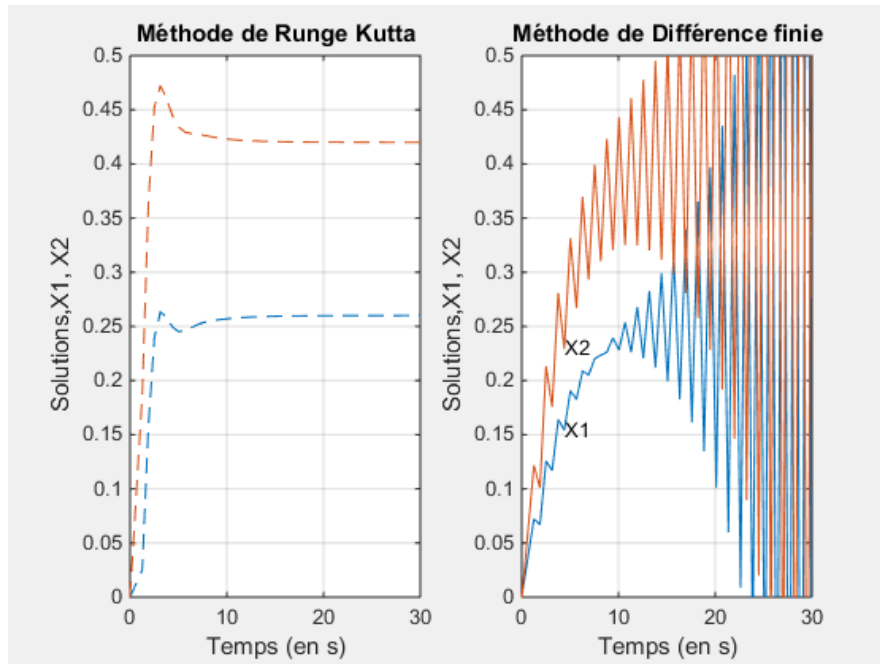


Figure 11 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 avec Runge Kutta 4 et différences finies.

Après 70 secondes, nous observons une instabilité totale de la méthode de différences finies (Figure 12).

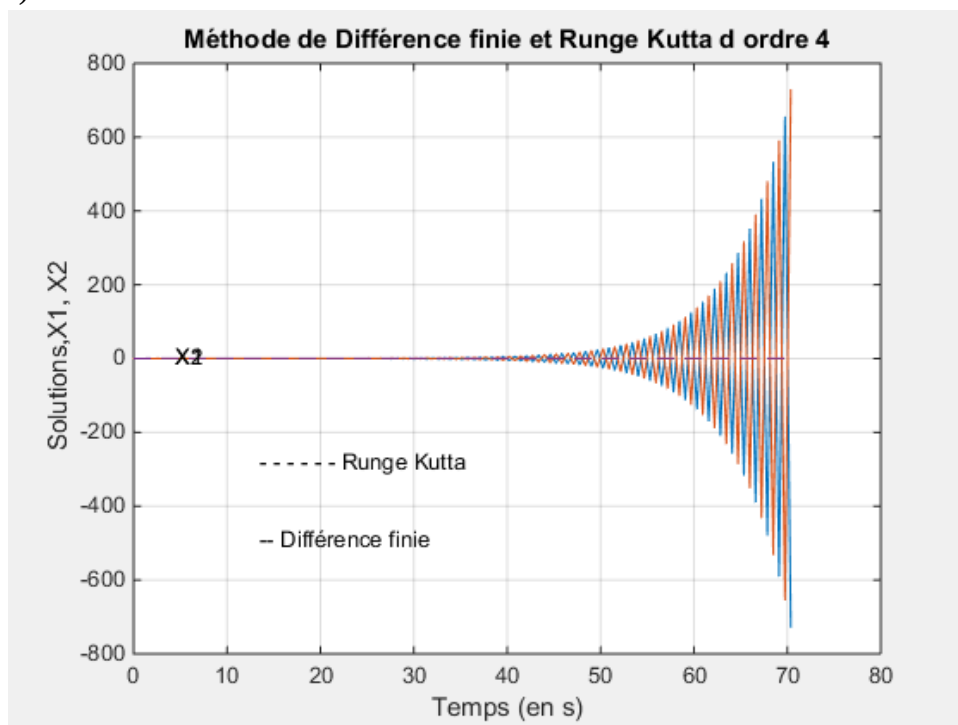


Figure 12 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 .

La Figure 13 illustre la comparaison de la méthode de Runge Kutta et celle de différences finies sur deux graphiques différents.

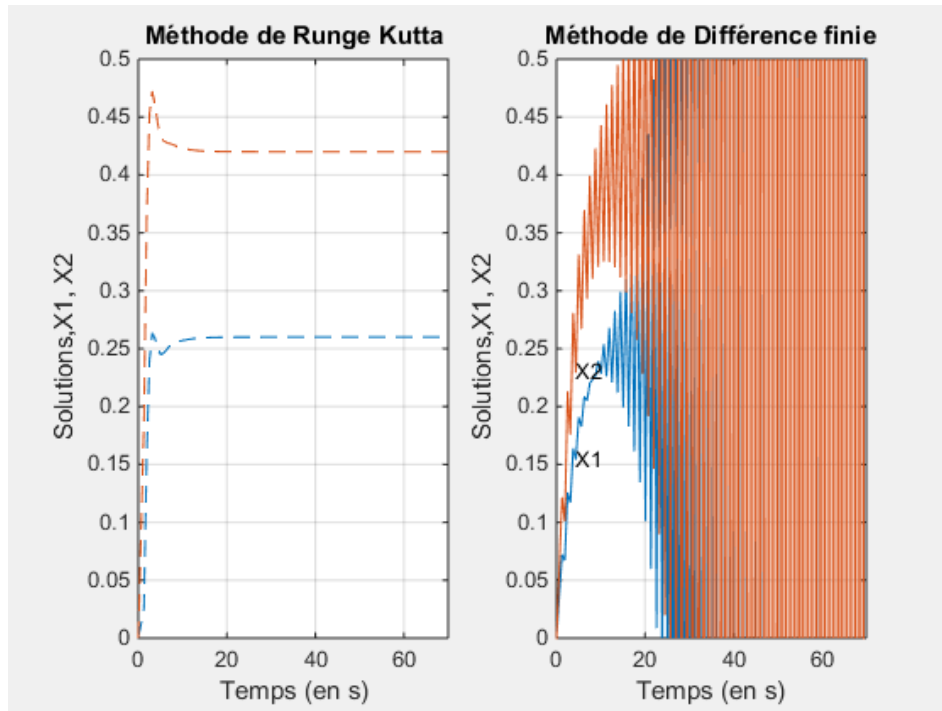


Figure 13 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 avec Runge Kutta 4 et différences finies.

La Figure 14 illustre la comparaison entre la méthode de Runge Kutta d'ordre et celle de différences finies pour un temps élevé. Nous voyons que la méthode de différences finies donne des résultats invraisemblables, avec par exemple des déplacements de masse de 800 m.

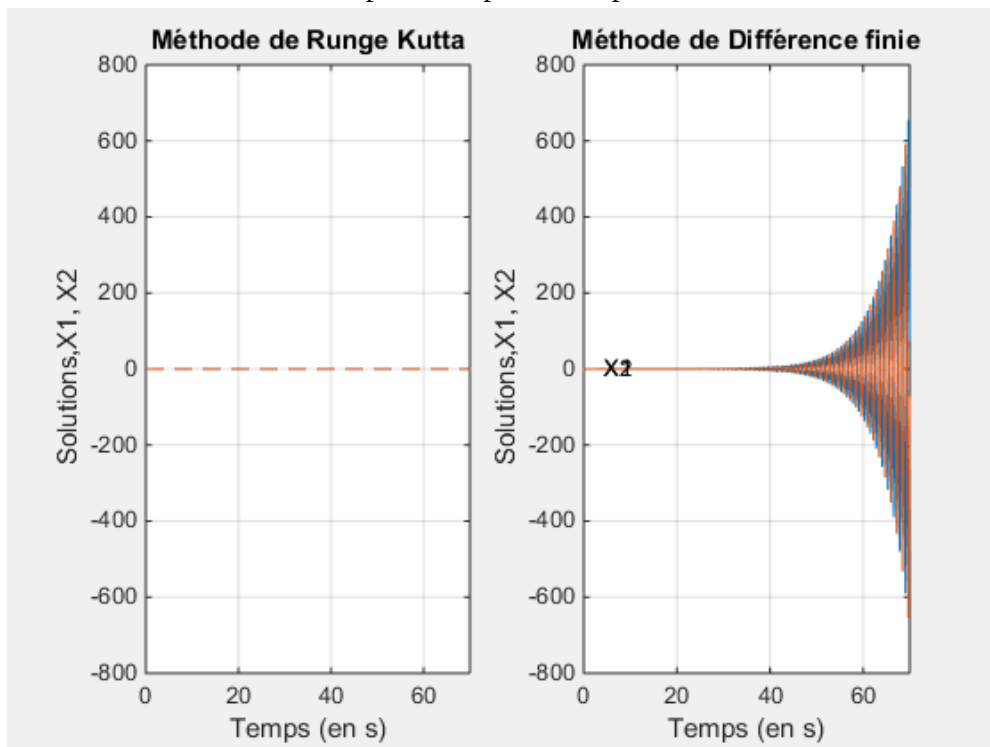


Figure 14 : Réponse du système discret aux forces f_1 et f_2 avec Runge Kutta 4 et différences finies

Dans la deuxième application, nous considérons un système discret de la figure 13 , le système possède 15 degrés de liberté ; les masses ont les valeurs suivantes : $m_1 = 2kg$; $m_2 = 2,1kg$; $m_3 = 1,8kg$; $m_4 = 1,9kg$; $m_5 = 2,5kg$; $m_6 = 2,6kg$; $m_7 = 2,8kg$; $m_8 = 1,5kg$; $m_9 = 2,7kg$; $m_{10} = 3kg$; $m_{11} = 3,1kg$; $m_{12} = 3,2kg$; $m_{13} = 3,4kg$; $m_{14} = 3,6kg$ et $m_{15} = 4kg$. Les coefficients d'amortissements sont : $c_1 = 3,5kg/sec$; $c_2 = 3,6kg/sec$; $c_3 = 2,8kg/sec$; $c_4 = 3,9kg/sec$; $c_5 = 4kg/sec$; $c_6 = 4,1kg/sec$; $c_7 = 4,2kg/sec$; $c_8 = 4,3kg/sec$; $c_9 = 3,3kg/sec$; $c_{10} = 4,5kg/sec$; $c_{11} = 4,8kg/sec$; $c_{12} = 5kg/sec$; $c_{13} = 5,3kg/sec$; $c_{14} = 5,2kg/sec$; $c_{15} = 3,5kg/sec$ et $c_{16} = 5,5kg/sec$ et les coefficients de rigidités sont égaux et vau x $k_i = 7N/m$. $i = 1, \dots, 16$.

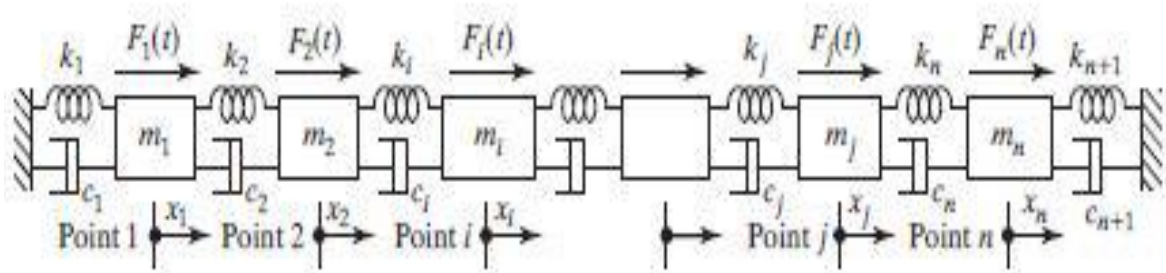


Figure 15 : Système discret

Les forces appliquées sur chaque masse sont réunies dans F ; dans cette application nous avons considérés que les forces sont constantes et vaut chacune :

$$f_1=0.01 \text{ N}; f_2=0.05 \text{ N}; f_3=0.1 \text{ N}; f_4=0.15\text{N}; f_5=0.2 \text{ N}; f_6=0.025 \text{ N}; f_7=0.03 \text{ N}; f_8=0.035 \text{ N}; \\ f_9=0.04 \text{ N}; f_{10}=0.045 \text{ N}; f_{11}=0.05 \text{ N}; f_{12}=0.055 \text{ N}; f_{13}=0.06 \text{ N}; f_{14}=0.065 \text{ N}; f_{15}=0.07 \text{ N}; \\ F=[f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6 \ f_7 \ f_8 \ f_9 \ f_{10} \ f_{11} \ f_{12} \ f_{13} \ f_{14} \ f_{15}]';$$

En appliquant le théorème énergétique de Lagrange au système de la figure 15, nous obtenons le système d'équation :

$$[M]\ddot{\vec{q}} + [C]\dot{\vec{q}} + [K]\vec{q} = \vec{F} \quad (20)$$

Avec les matrices $[M]$, $[C]$ et $[K]$:

[illegible]

[illegible]

$$[C] = \begin{pmatrix} c_1+c_2 & -c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2 & c_2+c_3 & -c_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & c_3+c_4 & -c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_4 & c_4+c_5 & -c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_5 & c_5+c_6 & -c_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -c_6 & c_6+c_7 & -c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_7 & c_7+c_8 & -c_8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_8 & c_8+c_9 & -c_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_9 & c_9+c_{10} & -c_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{10} & c_{10}+c_{11} & -c_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{11} & c_{11}+c_{12} & -c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{12} & c_{12}+c_{13} & -c_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{13} & c_{13}+c_{14} & -c_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c_{14} & c_{14}+c_{15} & -c_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{15}+c_{16} \end{pmatrix}$$

La résolution du système d'équation (20) par la méthode des différences finies consiste à résoudre le système d'équations (B.23) à l'aide de Matlab© ; la résolution par la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 se fait en faisant un passage au premier degré.

Pour le calcul du pas d'intégration, considérons la plus petite période $T = 2,9085 \text{ sec}$. Traçons le graphique des valeurs propres, en prenant ε le plus faible soit $\varepsilon = 0,3795$.

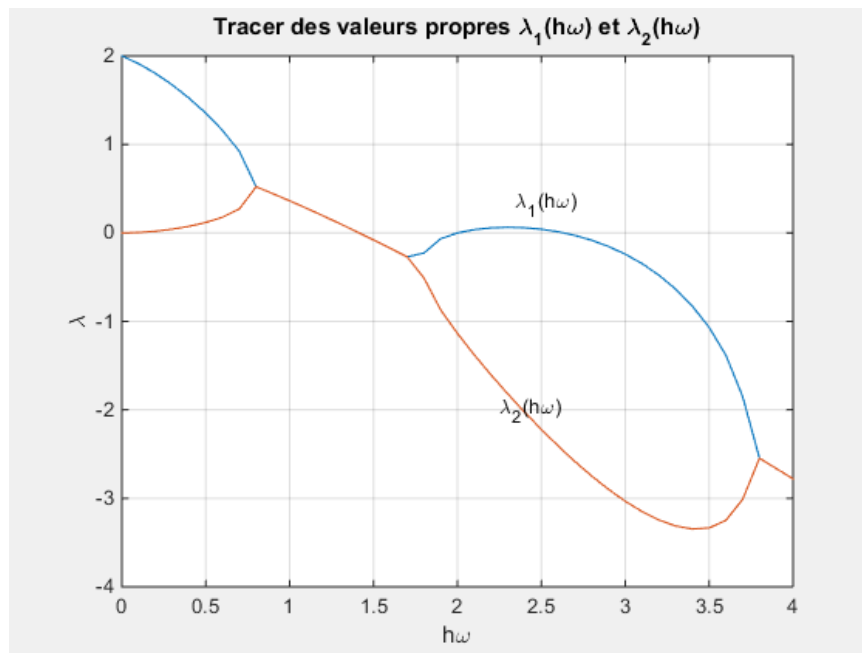


Figure 16 : graphique des valeurs propres.

Considérons le pas d'intégration pour lequel $\omega h = 1.7$ ce qui conduit à $h = 0,7873$.

Appliquons au système de la figure 15 les forces constantes pendant 150 secondes. Sur la figure 17, nous voyons qu'avec la méthode de Runge Kutta l'une de masse atteint un déplacement de 0,455 m et en raison de l'amortissement les masses deviennent immobiles après 140 secondes

mais avec la méthode différences finies le grand déplacement c'est 0,5m et quelques masses continuent à osciller jusqu'à 150 secondes.

En raison de l'utilisation de deux différentes méthodes, l'algorithme des différences finies (Annexe B) et l'algorithme de Runge Kutta 4 (Annexe C) les résultats obtenus sont différents mais relativement faiblement (Figure 17).

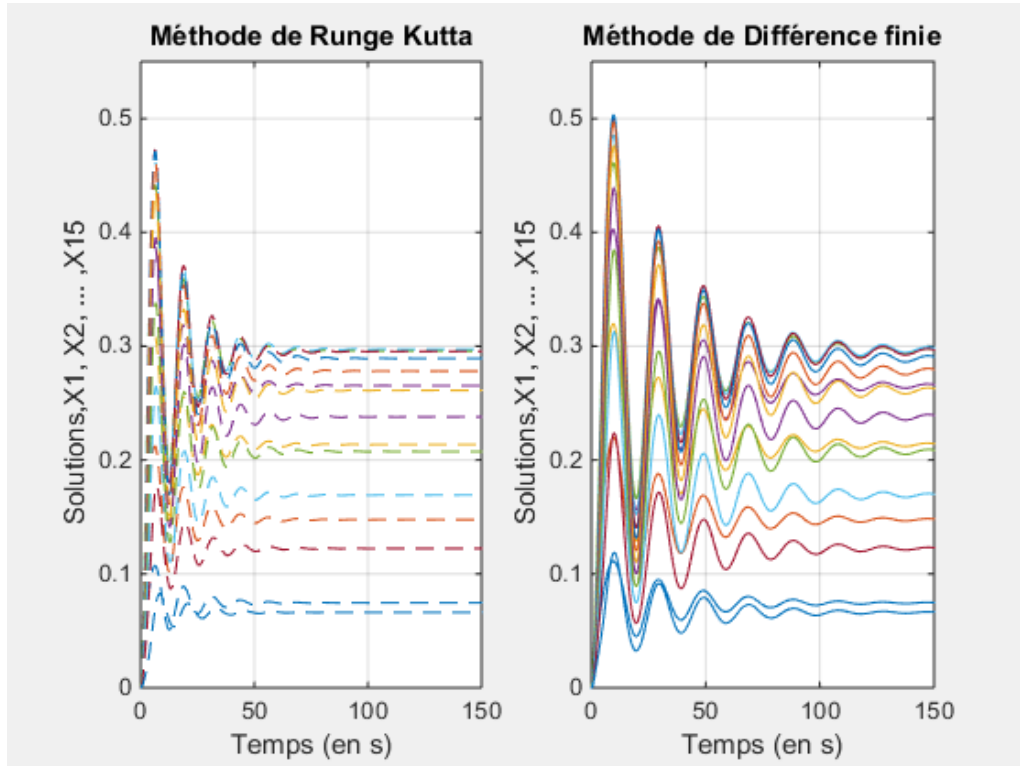


Figure 17 : Réponse du système avec la méthode de Runge Kutta et celle de la différences finies.

Traçons la réponse du système par la méthode de différences finies et celle de Runge-Kutta d'ordre 4. Les courbes (Figures 18, 19 et 20) sont tracées pour $t = 150$ secondes, $t = 250$ secondes et $t = 300$ secondes.

Le pas d'intégration est obtenu pour $\omega h = 2$. Nous observons que la méthode de différences finies devient instable lorsque le temps augmente, les masses occupent des positions inexplicables et ces positions augmentent indéfiniment avec le temps. Cependant, la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 reste toujours stable. Les masses oscillent autour de leurs positions d'équilibre jusqu'à ce qu'elles deviennent statiques, car le système est amorti.

$t=150$ s.

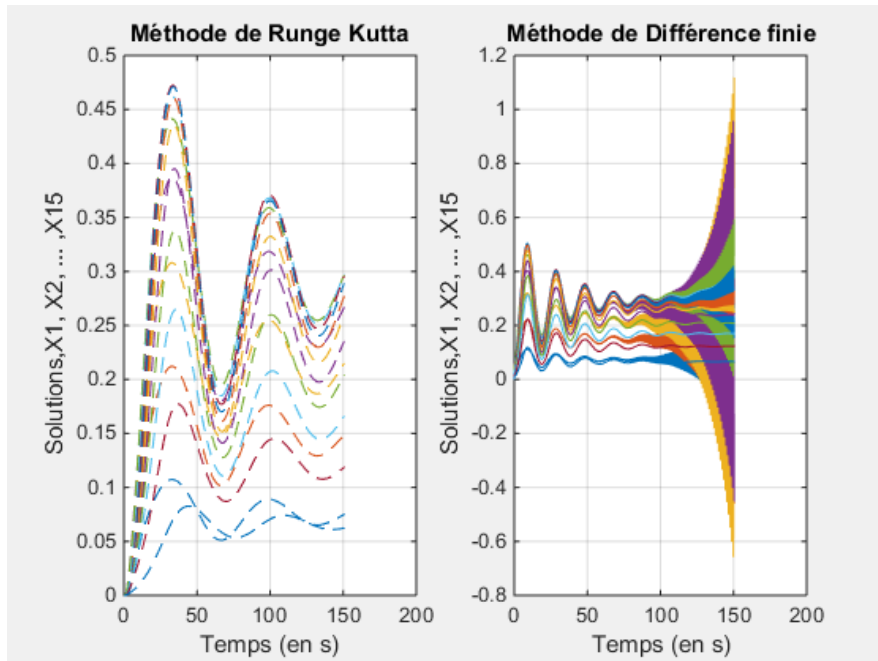


Figure 18 : Réponse du système avec la méthode de Runge Kutta et celle de la différences finies pour $t=150$ s.

$t=250$ s.

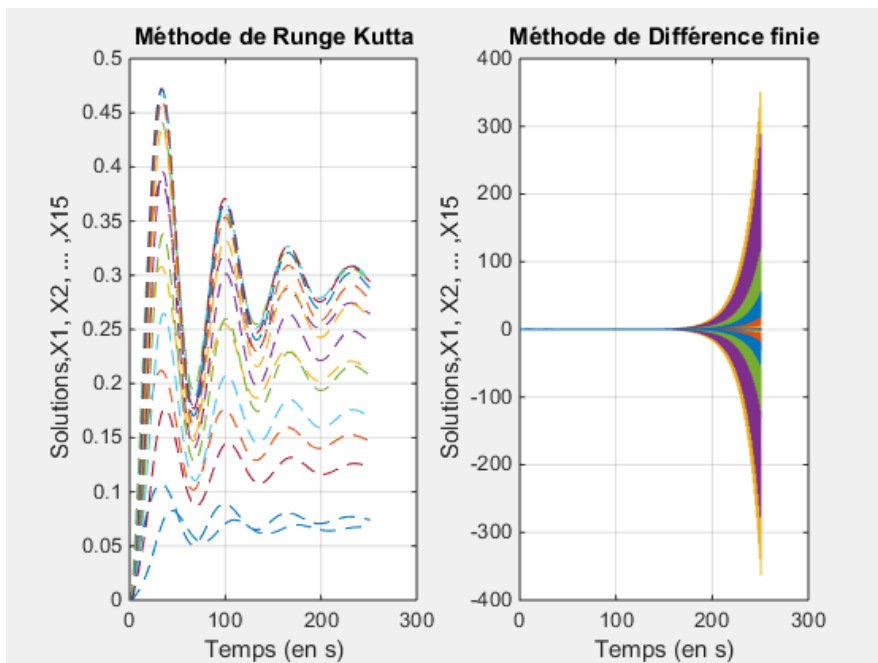


Figure 19 : Réponse du système avec la méthode de Runge Kutta et celle de la différences finies pour $t=250$ s.

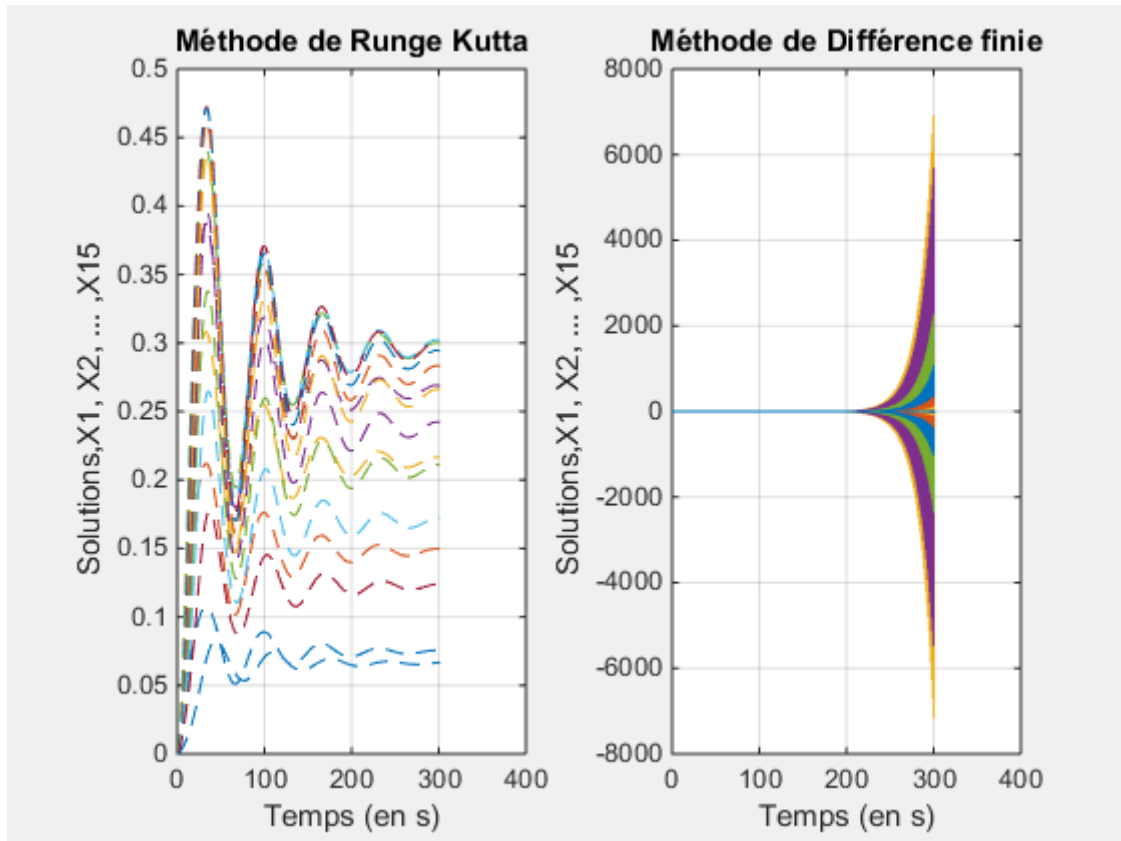
$t=300\text{sec}$ 

Figure 20 : Réponse du système avec la méthode de Runge Kutta et celle de différences finies pour $t= 300$ s.

Conclusion

Grâce au tracé des valeurs propres de la matrice d'amplification de l'opérateur d'intégration nous avons pu obtenir un pas d'intégration. Nous avons montré son rôle majeur lors de l'utilisation de la méthode de différences finies centrées dans la résolution des équations différentielles de systèmes mécaniques discrets linéaires.

Puis, ce pas d'intégration est utilisé pour résoudre les équations différentielles à l'aide de la méthode de différences finies centrées. Ainsi, lorsque le pas d'intégration est choisi à partir du graphique des valeurs propres de la matrice de l'opérateur d'intégration, la méthode de différences finies centrées est stable. Nous avons montré que si la valeur absolue des valeurs propres qui dépendent de la variable ωh est inférieure à 1 la méthode de différences finies centrées est stable. Par conséquent, nous pouvons choisir ωh pour que cette condition soit satisfaite. À contrario, la méthode de différences finies centrées est instable pour des valeurs de la variable ωh pour lesquelles la valeur absolue des valeurs propres est supérieure à 1. Ceci s'explique du fait que les valeurs propres de la matrice d'amplification ont un module supérieur à 1 ainsi la perturbation sera amplifiée. Dans nos applications, la méthode Runge Kutta d'ordre 4 ne pose pas de problème d'instabilité.

Remerciements

Les auteurs remercient les responsables du laboratoire d'informatique de l'université de Lubumbashi pour avoir facilité l'utilisation de Matlab© dans le cadre de cet article.

Références

- [1] S. Rao (2004), « *Mechanical vibration* », université de Miami, Edition Pearson, Livre. Pages 870 à 1012
- [2] L. MAHEO (2006), « *Étude des effets dissipatifs de différents schémas d'intégration temporelle en calcul dynamique par éléments finis* », Laboratoire Génie Mécanique et Matériaux, Université de Bretagne Sud, thèse de Doctorat. Pages 13 à 27
- [3] L. Noel (2004), « *Contributions aux algorithmes d'intégration temporelle conservant l'énergie en dynamique non-linéaire des structures* », Faculté des sciences appliquées, Université de Liège, thèse de Doctorat. Pages 33 à 69
- [4] M.D. Pedro et P. Pahud (1988), « *Mécanique vibratoire: système discret* », presse polytechnique romandes, Livre. Pages 10 à 70
- [5] P. Dehombreux (1995), « *Simulation du comportement dynamique de systèmes multicorps contraints* », Faculté polytechnique de Mons, Thèse de Doctorat. Pages 20 à 70
- [6] E. Goncalevès (2005), « *Résolution numérique, discrétisation des EDP et EDO* », Institut national polytechnique de Grenoble. Cours, Pages 39 à 59
- [7] O. Verlinden (1994), « *Simulation du comportement dynamique de systèmes multicorps flexibles comportant des membrures de forme complexe* », thèse de Doctorat, Faculté polytechnique de Mons. Pages 33 à 66
- [8] I. Cochlin (1997), « *Analysis and design of dynamic systems* », Addison-Wesley Editeur.
- [9] Q. Bombled (2011), « *Modeling and control of six-legged Robots: Application to AMRU5* », Université de Mons, Thèse de Doctorat. Pages 27 à 60
- [10] M. Geradin et D. Rixen (1993), « *Théorie des vibrations : Application à la dynamique des structures* », Edition Masson. Livre. Pages 363 à 405
- [11] R.J Guyan (Février 1965), « *Reduction of Stiffness and Mass Matrices* », AIAA Journal, Vol. 3, N°2, p 380.
Doi: <https://doi.org/10.2514/3.2874>
- [12] R. Ali (1983), « *Finite difference methods in vibration analysis* », Shock and Vibration Digest, Vol. 15, N°3; p. 3-7
- [13] T.J.R. Hughes (1976), « *A note on the stability of Newmark's algorithm in nonlinear structural dynamics* », International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 11, p. 383-386.
Doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620110212>
- [14] R.N. Jazar (2011), « *Advanced Dynamics: Rigid body, multibody and aerospace applications* », Edition Wiley.

Annexes

A. Éléments des systèmes mécaniques

1. Éléments de masse

- Translation

La Figure A.1 illustre une masse en mouvement de translation. La modélisation mathématique du mouvement peut être obtenue en appliquant la deuxième loi de Newton ou la méthode énergétique de Lagrange [4].

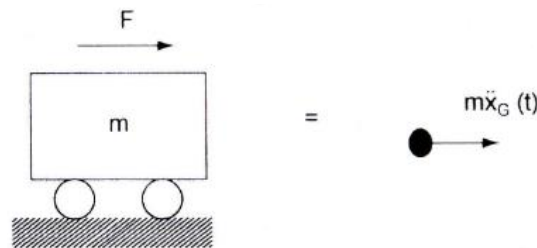


Figure A.1 : masse avec mouvement de translation.

Sur cette figure, nous avons le système réel à gauche et le système discret à droite, $m\ddot{x}_G(t)$ représente la force d'inertie de la masse.

- Rotation

La Figure A.2 illustre une masse en mouvement de rotation, à gauche nous avons le système réel et à droite le système discret. Les équations du mouvement sont obtenues en appliquant au système discret les lois de Newton ou celles de Lagrange [4].

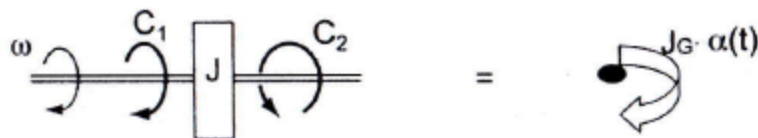


Figure A.2 : masse avec mouvement de rotation.

La force d'inertie angulaire de la masse en rotation est donnée par $J_G \ddot{\theta}(t)$.

2. Éléments d'amortisseur

Il existe différents type d'amortisseurs, source de dissipation d'énergie

- Amortissement visqueux C

L'amortissement visqueux ou pour les fluides, le degré de viscosité est élevé, la relation entre la vitesse vibratoire et la force d'amortissement est linéaire. Les Figures A.3 et A.4 montrent respectivement l'exemple d'amortissement visqueux dans un mouvement de translation et de rotation.

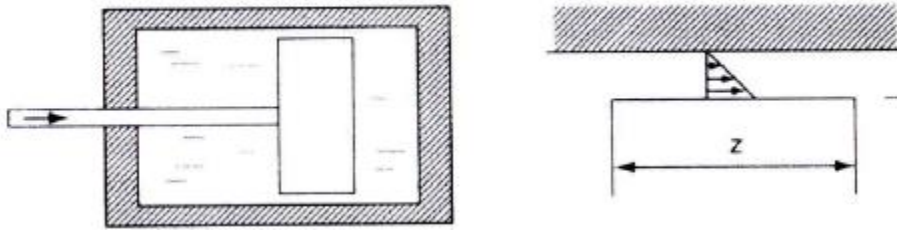


Figure A.3 : Amortissement visqueux (mouvement de translation).

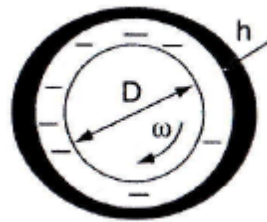


Figure A.4 : Amortissement visqueux (mouvement de rotation).

Les symboles mécaniques pour représenter l'amortissement visqueux en translation et en rotation sont donnés sur les figures A.5 et A.6 respectivement.

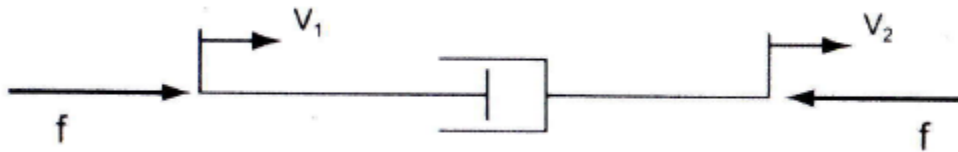


Figure A.5 : Symbole de l'amortissement visqueux en translation.

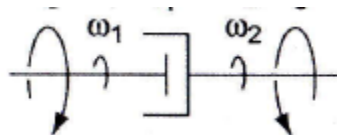


Figure A.6 : Symbole de l'amortissement visqueux en rotation.

- Amortissement structural (ou hystérétique)

La force d'amortissement est proportionnelle au déplacement pour un amortissement structural, mais elle est toutefois déphasée de $\frac{\pi}{2}$.

- Le frottement sec (de coulomb)

Le frottement sec est modélisé par l'amortissement de Coulomb, la force est proportionnelle à l'effort normal N . la constante de proportionnalité est appelé coefficient de frottement [4].

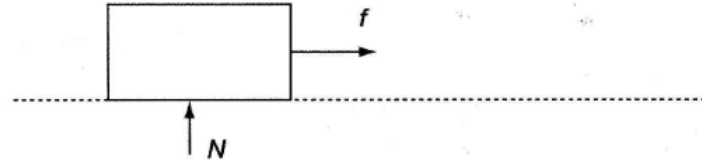


Figure A.7 : Frottement sec.

3. Éléments de ressort K

Les figures A.8 et A.9 représentent des ressorts en translation et en rotation respectivement avec extrémité mobile. La force à l'extrémité du ressort est proportionnelle au déplacement x [1].

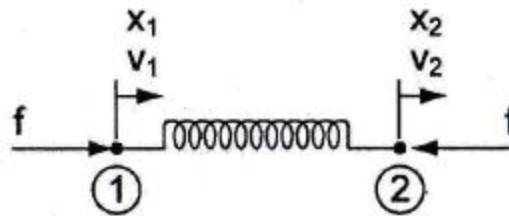


Figure A.8 : Symbole mécanique du ressort en translation

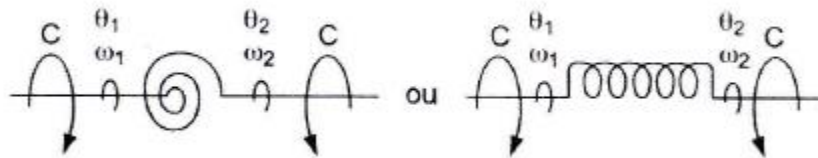


Figure A.9 : Symbole mécanique du ressort en rotation

B. Méthode de différences finies

L'algorithme de différences centrées est déduit de la méthode de Newmark [2]. Considérons le schéma à un pas de Newmark. La méthode de Newmark calcul à l'aide de la formule de Taylor l'état du système à un instant donné $t_{n+1} = t_n + h$ en fonction de l'état connu à l'instant t_n . La méthode de Newmark est une méthode d'intégration à un pas.

$$f(t_n + h) = f(t_n) + hf'(t_n) + \frac{h^2}{2} f''(t_n) + \dots + \frac{h^s}{s!} f^{(s)}(t_n) + R_s \quad (\text{B.1})$$

Où R_s est le reste du développement à l'ordre s .

$$R_s = \frac{1}{s!} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f^{(s+1)}(\tau) [t_n + h - \tau]^s d\tau \quad (\text{B.2})$$

La formule (B.1) permet de calculer le déplacement et la vitesse des systèmes à l'instant t_{n+1} .

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + h\dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)\ddot{q}(\tau)d\tau \\ \dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Dans la relation (B.3), q_{n+1} est développement de Taylor d'ordre 2 du déplacement et $\dot{q}_{n+1}$ le développement d'ordre 1 de la vitesse.

L'approximation consiste à calculer par quadrature numérique les intégrales de l'accélération dans (B.3). Pour ce faire, exprimons $\ddot{q}(\tau)$ en fonction de $\ddot{q}_n$ et $\ddot{q}_{n+1}$ dans l'intervalle $[t_n, t_{n+1}]$:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_n &= \ddot{q}(\tau) + q^{(3)}(\tau)(t_n - \tau) + q^{(4)}(\tau)\frac{(t_n - \tau)^2}{2} + \dots \\ \ddot{q}_{n+1} &= \ddot{q}(\tau) + q^{(3)}(\tau)(t_{n+1} - \tau) + q^{(4)}(\tau)\frac{(t_{n+1} - \tau)^2}{2} + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

En multipliant les équations (B.4) par $(1-\gamma)$ et par γ , nous obtenons :

$$\ddot{q}(\tau) = (1-\gamma)\ddot{q}_n + \gamma\ddot{q}_{n+1} + q^{(3)}(\tau)[\tau - h\gamma - t_n] + 0(h^2q^{(4)}) \quad (\text{B.5})$$

De même, en multipliant les équations (4) par $(1-2\beta)$ et par 2β , nous obtenons :

$$\ddot{q}(\tau) = (1-2\beta)\ddot{q}_n + 2\beta\ddot{q}_{n+1} + q^{(3)}(\tau)[\tau - 2h\beta - t_n] + 0(h^2q^{(4)}) \quad (\text{B.6})$$

Obtient les formules de quadrature numérique suivante, si on substitue (B.5) et (B.6) dans les intégrales (B.3).

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \ddot{q}(\tau)d\tau &= (1-\gamma)h\dot{q}_n + \gamma h\dot{q}_{n+1} + r_n \\ \int_{t_n}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - \tau)\ddot{q}(\tau)d\tau &= \left(\frac{1}{2} - \beta\right)h^2\ddot{q}_n + \beta h^2\ddot{q}_{n+1} + r_n' \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Avec les erreurs de quadrature correspondantes :

$$\begin{aligned} r_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right)h^2q^{(3)}(\tilde{\tau}) + 0(h^3q^{(4)}) \\ r_n' &= \left(\beta - \frac{1}{6}\right)h^3q^{(3)}(\tilde{\tau}) + 0(h^4q^{(4)}) \end{aligned} \quad t_n < \tilde{\tau} < t_{n+1} \quad (\text{B.8})$$

Les constantes γ et β sont les paramètres de la formule de quadrature. La substitution de (B.7) dans (B.3) donne les approximations pour la méthode de Newmark [3].

$$\begin{aligned}\dot{q}_{n+1} &= \dot{q}_n + (1-\gamma)h\ddot{q}_n + \gamma h\ddot{q}_{n+1} \\ q_{n+1} &= q_n + h\dot{q}_n + h^2\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\ddot{q}_n + h^2\beta\ddot{q}_{n+1}\end{aligned}\quad (\text{B.9})$$

La méthode de différences finies centrées est obtenue à partir de l'algorithme de Newmark en posant $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = 0$.

Après quelques manipulations mathématiques des relations (B.9), nous obtenons les expressions suivantes de l'accélération et de la vitesse :

$$\ddot{q}_n = \frac{q_{n+1} - 2q_n + q_{n-1}}{h^2} \quad (\text{B.10})$$

$$\dot{q}_n = \frac{1}{2h}(q_{n+1} - q_{n-1}) \quad (\text{B.11})$$

La résolution équation différentielle pour un système linéaire discret amorti à plusieurs degrés de liberté par la méthode de différences finies se fait de la manière suivante. Considérons les équations différentielles de la dynamique d'un système mécanique linéaire :

$$[M]\ddot{\vec{q}} + [C]\dot{\vec{q}} + [K]\vec{q} = \vec{F} \quad (\text{B.12})$$

Où $[M]$, $[K]$ et $[C]$ sont les matrices masses, de rigidité et d'amortissement ; $\vec{F}$ est le vecteur force et $\vec{q}$ le vecteur de déplacement. La méthode de différences finies centrées pour l'accélération et la vitesse à l'instant $t_i = i\Delta t$ sont :

$$\ddot{\vec{q}}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left(\vec{q}_{i+1} - 2\vec{q}_i + \vec{q}_{i-1} \right) \quad (\text{B.13})$$

$$\dot{\vec{q}}_i = \frac{1}{2\Delta t} \left(\vec{q}_{i+1} - \vec{q}_{i-1} \right) \quad (\text{B.14})$$

A partir des relations (B.13) et (B.14), la relation (B.12) s'écrit à l'instant t_i comme suit :

$$[M]\frac{1}{(\Delta t)^2} \left(\vec{q}_{i+1} - 2\vec{q}_i + \vec{q}_{i-1} \right) + [C]\frac{1}{2\Delta t} \left(\vec{q}_{i+1} - \vec{q}_{i-1} \right) + [K]\vec{q}_i = \vec{F}_i \quad (\text{B.15})$$

Où $\vec{q}_{i+1} = \vec{q}(t = t_{i+1})$, $\vec{q}_i = \vec{q}(t = t_i)$, $\vec{q}_{i-1} = \vec{q}(t = t_{i-1})$, $\vec{F}_i = \vec{F}(t = t_i)$ et $t_i = i\Delta t$.

Après réarrangement de l'équation (B.15), nous obtenons :

$$\left[\frac{1}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \vec{q}_{i+1} = \vec{F}_i - \left[[K] - \frac{2}{(\Delta t)^2} [M] \right] \vec{q}_i - \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \vec{q}_{i-1} \quad (\text{B.16})$$

A partir des $\vec{q}_i$ et $\vec{q}_{i-1}$, l'équation (B.16) permet de trouver le vecteur solution $\vec{q}_{i+1}$. l'équation est utilisé pour $i = 1, 2, \dots, n$. Nous avons besoin des $\vec{q}_0$ et $\vec{q}_{-1}$ pour calculer $\vec{q}_1$, pour $i = 0$, les équations (B.12), (B.13) et (B.14) deviennent :

$$[M]\ddot{\vec{q}}_0 + [C]\dot{\vec{q}}_0 + [K]\vec{q}_0 = \vec{F}_0 \quad (\text{B.17})$$

$$\ddot{\vec{q}}_0 = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left(\vec{q}_1 - 2\vec{q}_0 + \vec{q}_{-1} \right) \quad (\text{B.18})$$

$$\dot{\vec{q}}_0 = \frac{1}{2\Delta t} \left(\vec{q}_1 - \vec{q}_{-1} \right) \quad (\text{B.19})$$

Des relations (B.18) et (B.19) ; nous déduisons :

$$\vec{q}_1 = \vec{q}_{-1} + 2\Delta t \dot{\vec{q}}_0 \quad (\text{B.20})$$

$$\ddot{\vec{q}}_0 = \frac{2}{(\Delta t)^2} \left(\Delta t \dot{\vec{q}}_0 - \vec{q}_0 + \vec{q}_{-1} \right) \quad (\text{B.21})$$

A partir du développement de Taylor, nous pouvons écrire :

$$\ddot{\vec{q}}_{-1} = \vec{q}_0 - \Delta t \dot{\vec{q}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\vec{q}}_0 \quad (\text{B.22})$$

De la relation (B.16), nous écrivons :

$$\vec{q}_{i+1} = \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right]^{-1} \left\{ \vec{F}_i - \left[[K] - \frac{2}{(\Delta t)^2} [M] \right] \vec{q}_i - \left[\frac{1}{(\Delta t)^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right] \vec{q}_{i-1} \right\} \quad (\text{B.23})$$

Avec $\vec{F} = F(t = t_i)$

Connaissant les déplacements $\vec{q}_{i+1}$, à l'instant $t = t_i$ nous calculons l'accélération et la vitesse :

$$\ddot{\vec{q}}_i = \frac{1}{(\Delta t)^2} \left(\vec{q}_{i+1} - 2\vec{q}_i + \vec{q}_{i-1} \right) \quad (\text{B.24})$$

$$\dot{\vec{q}}_i = \frac{1}{2\Delta t} \left(\vec{q}_{i+1} - \vec{q}_{i-1} \right) \quad (\text{B.25})$$

C. Méthode de Runge Kutta d'ordre 4

La méthode numérique de Runge Kutta d'ordre 4 permet de résoudre les équations de la forme :

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

La solution se met sous la forme suivante :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (\text{C.2})$$

Avec

$$k_1 = hf(x_n, y_n)$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3).$$