

JOURNAL INTERNATIONAL DE TECHNOLOGIE, DE L'INNOVATION,
DE LA PHYSIQUE, DE L'ENERGIE ET DE L'ENVIRONNEMENT

**Etude du comportement d'une fissure
dans un multicouche soumis à la flexion
quatre points :
Cas d'une fissure elliptique enterrée**

A. R. Korbeogo, B. K. Bonzi, R. N. Kouitat, Z. Koalaga, F. Zougmore



ISSN : 2428-8500

DOI : [10.18145/jitipee.v6i1.252](https://doi.org/10.18145/jitipee.v6i1.252)

Etude du comportement d'une fissure dans un multicouche soumis à la flexion quatre points : Cas d'une fissure elliptique enterrée

Aly Rachid Korbeogo⁽¹⁾, Bernard K. Bonzi⁽²⁾, Richard N. Kouitat⁽³⁾,
Zacharie Koalaga⁽¹⁾, François Zougmore⁽¹⁾

(1) Laboratoire des matériaux et environnement (LAME), Université Joseph Ki-ZERBO, École Doctorale Sciences et Technologie (EDST), Burkina Faso

(2) Laboratoire de mathématiques et d'informatique (LAMI), Université Joseph Ki-ZERBO, École Doctorale Sciences et Technologie (EDST), Burkina Faso

(3) Université de Lorraine, Institut Jean Lamour, Dpt N2EV, UMR 7198 CNRS, Parc de Saurupt CS 14234, 54042 Nancy Cedex France
alykorbeogo@yahoo.fr

Résumé - *Le multicouche est au cœur de l'évolution de l'industrie moderne, nous le rencontrons dans plusieurs édifices. Ce travail a permis, après validation numérique du problème de traction uniforme résolu analytiquement par Sneddon, de montrer l'efficacité de notre méthode d'étude pour traiter les problèmes de fissure partiellement ouverte. En plus de cela, nous avons pu mettre en évidence l'efficacité de la méthode pour traiter les problèmes de fissuration dans les multicouches. L'étude de la flexion quatre points appliqués à un domaine homogène et un multicouche ayant les mêmes propriétés mécaniques montrent un bon accord entre les résultats du domaine homogène et du domaine multicouche. Ces résultats consolident notre approche et pour terminer nous avons initié l'étude d'un milieu hétérogène. À travers cette dernière partie nous avons pu mettre en évidence l'influence des interfaces sur l'évolution des facteurs d'intensité de contrainte. Cependant notre étude doit être approfondie avec d'autres exemples car en ingénierie l'utilisation des structures multicouche est très répandue.*

Mots clés : *Multicouche, fissure elliptique, méthode des éléments de frontière, facteurs d'intensité de contrainte*

DOI : 10.18145/jitipee.v6i1.252

Introduction

L'étude des mécanismes de fissuration sous sollicitation complexe a déjà retenu l'attention de nombreux chercheurs (Franck F.C. et al [1]) et (Mouginot et al [2], [3]). Dans ce travail nous nous intéressons au cas d'une fissure enterrée dans un milieu multicouche. En effet dans presque tous les édifices mécaniques, la structure interne est faite à base d'empilement de couches de même nature ou de nature diverse.

Nous présentons ci-après une étude numérique réalisée avec un outil spécifiquement développé et basé sur la méthode des éléments de frontières (BEM, Boundary Element Method) qui permet en un temps de résolution raisonnable de traiter de manière très efficace des problèmes de fissures tridimensionnelles. (Bush MB [4]), (Komvopoulos [5]), (Choi HJ [6]), (Cruse [7]), (Mi et al. [8]), (Domiguez et al. [9]), (Young [10]), (Bonnet [11]) et (Aliabadi [12]). L'étude présentée dans ce papier a pour objectif de montrer l'efficacité de la méthode d'une part de traiter les problèmes de fissuration tridimensionnelle rencontrée en mécanique linéaire de rupture ; et d'autre part montrer que la méthode proposée peut être utilisée pour les problèmes de mécanique de rupture rencontrés dans les systèmes multicouches. Dans la suite nous considérons un défaut de forme elliptique enterrée dans le domaine soumis à une flexion quatre points.

Avant chargement, le défaut initial est fermé. Après chargement, il peut le demeurer, s'ouvrir partiellement ou totalement. Il est donc important de tenir compte des conditions de contact unilatéral au niveau des lèvres de la fissure. Pour simplifier l'étude, un glissement parfait des lèvres de la fissure est admis. Nous pouvons noter que la BEM est aussi une méthode de résolution bien adaptée pour les problèmes de contact (Man et al. [13]), (Dandekar et al [14]), (Takahashi et al [15]), (Olukoko et al [16]) et (Karami [17]).

1. Définition du problème

1.1. Énoncé du problème

On considère un solide élastique occupant un domaine Ω de l'espace de frontière externe Γ et une frontière interne Γ^C décrivant la forme de la fissure. Sur le schéma de la figure 1, la frontière de la fissure Γ^C est constituée de deux faces Γ^{C+} et Γ^{C-} . On utilise le système de coordonnées cartésiennes Ox_i avec $i=1, 2, 3$.

L'objectif est d'évaluer la dangerosité de la fissure ; pour cela nous étudions l'influence de différents paramètres sur les valeurs des facteurs d'intensité de contraintes.

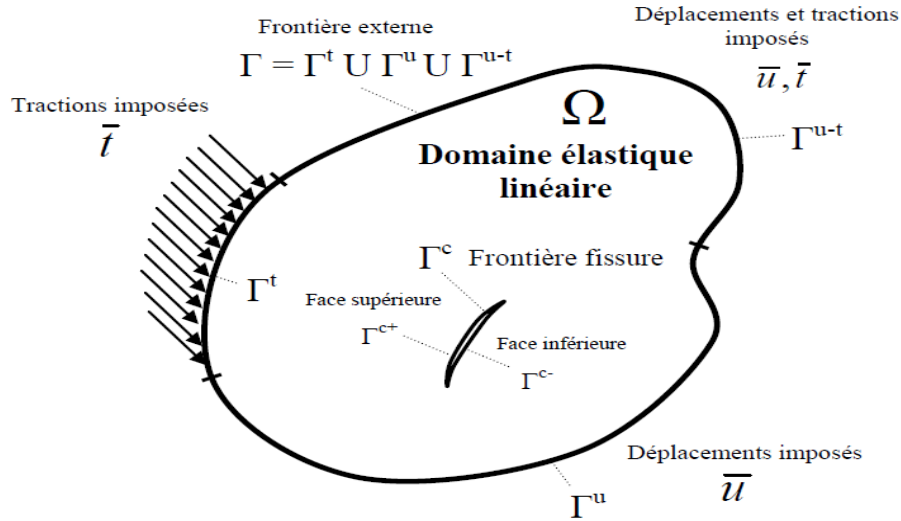


Figure 1 : Schéma d'un solide élastique sous sollicitations mécaniques imposées.

On néglige les forces de volume et on adopte la notation indicielle et la convention de sommation d'Einstein. L'équilibre des forces et des moments en l'absence de forces de volume s'écrit dans le système de coordonnées considéré :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad \text{dans } \Omega \setminus \Gamma_n \cup \Gamma_c \quad (1)$$

Avec σ le tenseur des contraintes de Cauchy, qui dans le cas de l'élasticité linéaire en petites déformations est lié au tenseur des déformations linéarisé par la loi de Hooke :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

Dans la relation (2), C_{ijkl} est le tenseur isotrope de quatrième ordre des constants élastiques du matériau. Il s'exprime en fonction du module de cisaillement (G) et du coefficient de Poisson (ν) par :

$$C_{ijkl} = G \left[\frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} \right] \quad (3)$$

δ_{ij} est le symbole de Kronecker tel que : $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Le tenseur des petites déformations ε_{kl} est défini à partir du vecteur déplacement u par :

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (4)$$

En prenant compte des équations (2) et (4), l'équation (1) peut se réécrire comme :

$$C_{ijkl}u_{k,jl} = 0 \quad (5)$$

Les conditions aux limites de type flux associées à cette équation sont de la forme :

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (6)$$

Avec $\vec{n}$ le vecteur normal extérieur à la frontière considérée.

Le but de la mécanique linéaire de la rupture est de pouvoir développer un critère qui permet de prendre en compte l'existence des fissures au sein d'un matériau. Il est donc important de définir un facteur de charge lié à un problème donné pour le comparer à un paramètre caractéristique du matériau utilisé. Ainsi il en découle trois facteurs appelés facteurs d'intensité de contrainte qui déterminent le déplacement des lèvres de la fissure en faisant une combinaison de trois principaux modes notés I, II et III (figure2) (Martin [26]).

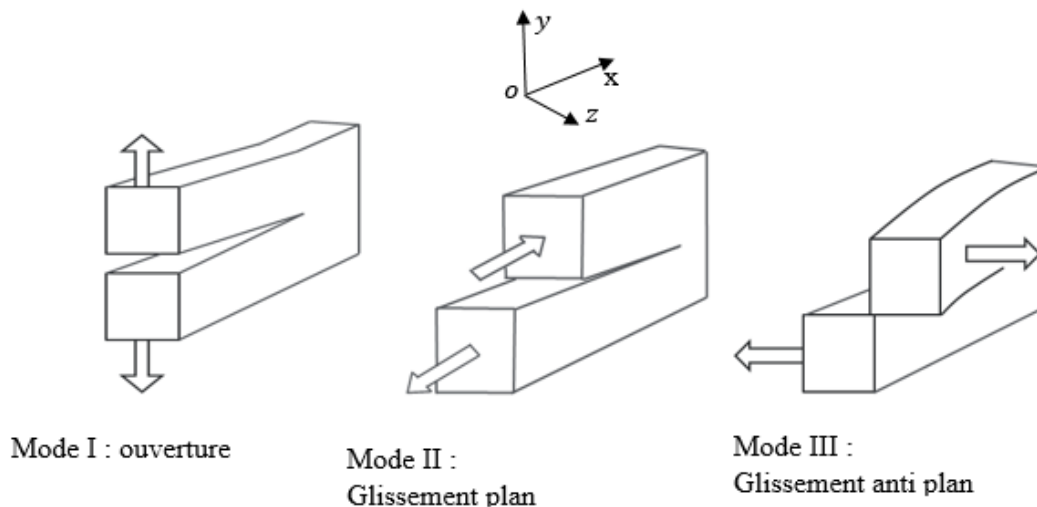


Figure 1: Modes de rupture d'un défaut (Martin [26]).

Les différents modes sont :

Mode I : un déplacement uniquement suivant (oy) correspond à un problème plan particulier (ouverture des lèvres de la fissure) ; ce mode est le plus souvent, le plus dangereux.

Mode II : ce facteur est engendré par un cisaillement dans le plan de la fissure et parallèle à l'axe (ox) (les surfaces de la fissure glissent l'une par rapport à l'autre dans leur plan – mode de cisaillement plan).

Mode III : ce facteur est produit par un cisaillement anti plan, situé dans le plan de la fissure (oxz) et parallèle à l'axe (oz).

Nous présentons les différents résultats de simulation qui permettront de comprendre le comportement d'un défaut enterré dans un multicouche sollicité en flexion quatre points.

Un multicouche est un système physique comprenant plusieurs couches (exemple les modules solaires) de même nature ou de nature différente (en termes de propriétés mécaniques) Tout d'abord il s'agira pour nous de valider le modèle utilisé en essayant de retrouver numériquement le résultat de la solution analytique d'un solide élastique soumis à une traction contenant une fissure circulaire centrée qui a été résolu analytiquement par Sneddon.

1.2. Méthode de résolution

La méthode duale des éléments de frontière permet de traiter le cas d'un solide élastique fissuré sans utiliser la méthode de décomposition en sous domaines. La méthode propose d'utiliser deux équations intégrales de frontière indépendantes. L'équation intégrale en déplacement est appliquée sur la frontière externe du solide et sur une des faces de la fissure (Aliabadi et al [18]). L'équation intégrale en traction est employée pour la seconde face de la fissure. Dans notre travail c'est une variante de cette méthode qui va être utilisée. Pour sa mise en application nous avons discrétisé une seule face de la fissure ; cette formulation fait intervenir le saut de déplacement entre les faces de la fissure. Ainsi l'équation intégrale en déplacement est appliquée aux nœuds de la frontière externe et l'équation intégrale en traction est utilisée pour les nœuds de la face de la fissure. Cette approche basée sur la discontinuité de déplacements est utilisée dans notre algorithme de calcul développé par notre équipe.

La frontière du domaine est composée des faces extérieures (Γ_n) et de la fissure Γ_c qui est elle-même constituée de deux faces Γ^{c+} et Γ^{c-} de telle sorte que $\Gamma^c = \Gamma^{c+} \cup \Gamma^{c-}$. Nous introduisons le saut de déplacement $\Delta u_j(x) = u_j(x^+) - u_j(x^-)$ et le saut de vecteur contrainte $\Delta t_j(x) = t_j(x^+) + t_j(x^-)$; x^+ (resp. x^-) étant un point, de la face Γ^{c+} (resp. Γ^{c-}), de coordonnée géométrique x . Nous nous limitons aux cas de fissures symétriquement chargées. Dans ce cas-là, la relation de discontinuité du vecteur contrainte disparaît des équations.

Pour tout point appartenant à la frontière extérieure du milieu, nous adoptons la formulation intégrale classique en déplacement, soit :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_n} T_{ki}(x, y)[u_i(y) - u_i(x)]dS(y) + \int_{\Gamma_c^+} T_{ki}(x, y)\Delta u_i(y)dS(y) \\ = \int_{\Gamma_n} U_{ki}(x, y)t_i(y)dS(y) \end{aligned} \quad (7)$$

Pour les points situés sur la face supérieure de la fissure, nous adoptons la formulation en vecteur contrainte :

$$t_k(x) = \int_{\Gamma_n} \bar{T}_{ki}(x, y) u_i(y) dS(y) + \int_{\Gamma_c^+} \bar{T}_{ki}(x, y) \Delta u_i(y) dS(y) - \int_{\Gamma_n} \bar{U}_{ki}(x, y) t_i(y) dS(y) \quad (8)$$

Dans cette formulation les inconnues du problème sont les vecteurs déplacements et contrainte sur la frontière extérieure, et saut de déplacement et contrainte au niveau des faces de la fissure.

Les expressions des fonctions d'influences qui apparaissent dans les équations (7) et (8) peuvent être trouvées dans de nombreux ouvrages (Brebbia et al [19]) et (Marc Bonnet [20]). Comme nous l'avons déjà mentionné, les inconnus sur les surfaces des fissures sont le vecteur de saut de déplacement ($\Delta \vec{u}$) et le vecteur de contrainte $\vec{t}(x^+)$.

La frontière extérieure et la face de la fissure supérieure sont subdivisées en un nombre fini d'éléments. Des éléments neuf nœuds conformes et/ou semi-discontinus sont utilisés pour les éléments de Γ_n . Les éléments de la surface de la fissure sont discontinus. Pour les éléments du front de fissure, l'interpolation introduite dans (Kouitat et al. [21]) est adoptée.

La forme discrétisée des équations aux frontières (eq. (7) et (8)) conduit alors à des systèmes d'équations de la forme suivante :

$$\begin{aligned} [A^n]\{x^n\} &= \{F^n\} - [B^n]\{\Delta u\} \\ \{T^c\} + [A^c]\{\Delta u\} &= [\bar{G}]\{t^n\} - [\bar{H}]\{u^n\} \end{aligned} \quad (9)$$

Où $\{x^n\}$ est le vecteur des grandeurs nodales inconnues sur la frontière extérieure (déplacements et vecteurs contraintes) ; $\{\Delta u\}$ est le vecteur des sauts de déplacements nodaux ; $\{u^n\}$ est le vecteur des déplacements nodaux sur la frontière extérieure ; $\{t^n\}$ est le vecteur des vecteurs contraintes nodaux sur la frontière extérieure ; $\{T^c\}$ est le vecteur des vecteurs contraintes nodaux sur la surface de la fissure. Pour le chargement envisagé, la fissure considérée peut être soumise à un mode de sollicitation complexe. Sur la face de la fissure, les sauts de déplacements et les vecteurs contraintes ne sont pas connus à l'avance. La fissure peut-être totalement fermée, partiellement fermée ou totalement ouverte. En conséquence, il est nécessaire d'imposer une condition de contact unilatéral aux faces de la fissure. En un point x de la surface de la fissure, nous introduisons le repère local $(\vec{n}(x), \vec{\tau}(x), \vec{\rho}(x))$. Le vecteur $\vec{n}(x)$ désigne la normale extérieure à la surface de la fissure au point x tel que $\vec{\tau}(x)$ et $\vec{\rho}(x)$ sont deux vecteurs mutuellement orthogonaux, et tangents au plan de la fissure. La discontinuité de déplacement normal et la contrainte normale doivent satisfaire :

$$\Delta u_j n_j = -\Delta U_n \leq 0, t_j n_j = -t_n \leq 0 \quad \text{et} \quad t_n \Delta u_n = 0 \quad (10)$$

Si la fissure s'ouvre, alors $\Delta U_n \neq 0$ et $t_n = 0$; sinon $\Delta U_n = 0$ et $t_n \neq 0$.

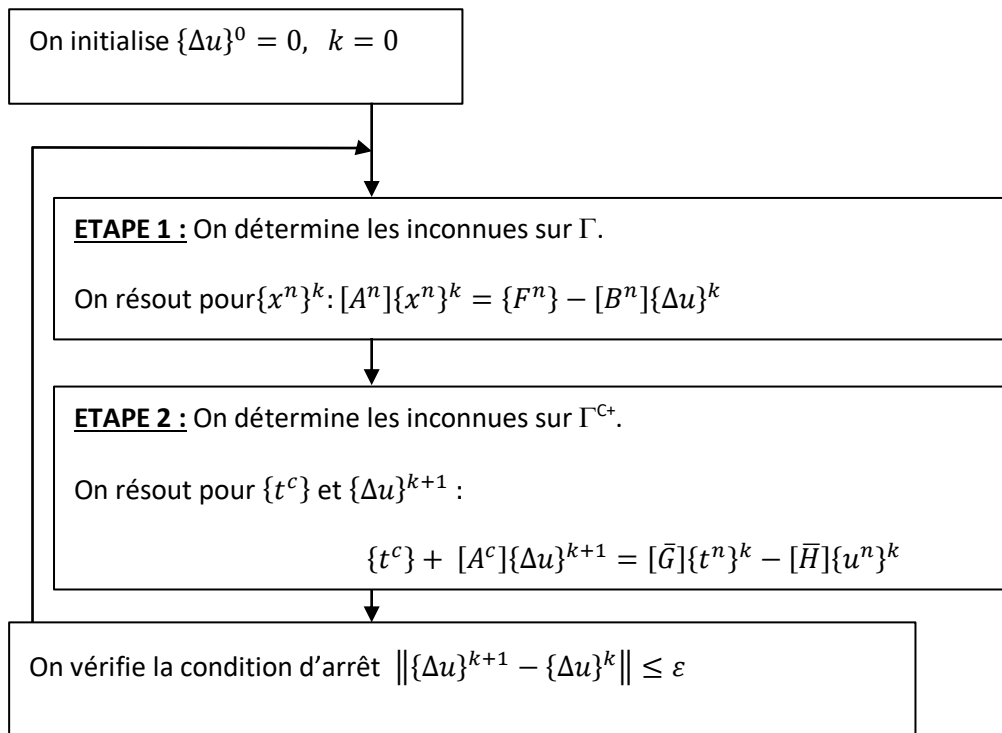
Nous supposons que le contact sur les faces de la fissure est sans frottement. Ce qui indique que les composantes tangentielles (t_τ et t_ρ) du vecteur contrainte sont identiquement nulles.

Nous avons choisi de résoudre les équations (8) et (9), combinées avec la condition de contact unilatéral, par un schéma itératif dont l'algorithme est résumé ci-après.

La résolution est réalisée par la procédure itérative suivante :

- (i) On suppose initialement que les sauts de déplacement à la surface de la fissure sont nuls.
- (ii) En appliquant les conditions aux limites à la frontière externe du domaine, on résout le système d'équation (9). On détermine ainsi les déplacements et traction sur Γ .
- (iii) En utilisant les solutions calculées à l'étape précédente on résout le système complété par les équations de contact unilatéral (10) on obtient ainsi les tractions et de nouvelles valeurs pour les sauts de déplacement sur Γ^{C+}

Si l'écart entre le Δu fixé initialement et celui obtenu à l'étape (iii) ne vérifie pas le critère de convergence la procédure reprend à l'étape (ii).



Où ε désigne la précision souhaitée

Cet algorithme peut être vu comme une présentation différente de la méthode de superposition pour résoudre les problèmes de fissure présentée par (Ameen et al [22]) et appliquée aux problèmes de fracture par compression en 2D par (Elvin et al [23]) et par (De Bremaecker et al. [24]). Dans un précédent travail, la fissuration en compression est formulée comme un problème de complémentarité et résolu par l'algorithme « PATH solver ». L'algorithme a été utilisé avec succès par (Christensen et al [25]).

Le système d'équation matriciel résolu à l'étape 1 reste inchangé au cours du processus itératif. La matrice du système est alors factorisée une fois pour toutes et stockée, ce qui permet un gain de temps de calcul. A l'étape 2, le système d'équations doit être complété par les équations de contact.

Pour chaque nœud de la frontière fissure, on écrit :

$$\begin{cases} \min(\Delta u_n, t_n) = 0 \\ t_\tau = 0 \\ t_\rho = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Le système obtenu est donc non-linéaire et non différentiable au sens classique. Nous avons appliqué la méthode de Newton utilisant la différentiabilité au sens de Bouligand (B-différentiabilité) présentée dans (Christensen et al. [22]) et (Martin [26]). Nous soulignons que la nécessité d'une dérivée directionnelle est due à la fonction $\min$ dans l'équation (11).

Les résultats présentés dans la suite ont été obtenus en utilisant cet algorithme. Dans tous les cas testés, le nombre moyen d'itérations pour converger avec $\varepsilon = 10^{-12}$ est d'environ 15. Les méthodes de calcul des facteurs d'intensité de contrainte sont très nombreuses. Une littérature très fournie existe sur ce sujet et de nombreuses techniques ont été proposées parmi lesquelles les méthodes d'extrapolation à partir des valeurs du déplacement sur les éléments de front, la méthode de l'élément avec nœud au quart (Martin [26]). Dans ce travail la méthode de l'élément avec nœud au quart est adoptée, nous en donnons les détails en annexe.

2. Résultats

2.1. Validation du modèle d'étude

À chaque mode de rupture est associé un champ de déformation et un champ de contrainte. Pour valider notre méthode calcul nous avons repris l'expérience numérique qui traite du problème résolu par Sneddon. Pour le cas particulier d'une fissure circulaire enfouie dans un massif infini soumis à une traction uniforme sur les deux faces inférieure et supérieure a été traité par Sneddon et l'expression de la solution analytique d'un tel problème est donné comme suit (Sneddon, [27],[28]) :

$$K_I = 2\sigma \sqrt{\frac{r}{\pi}} \quad (12)$$

$$\begin{cases} \text{contrainte: } \sigma \\ \text{rayon de la fissure: } r \end{cases}$$

Où K_I représente la valeur analytique de l'ouverture des lèvres de la fissure en mode I.

On considère le domaine d'étude représenté dans la figure suivante qui est un parallélogramme. Les paramètres du matériau utilisé sont un coefficient de Poisson $\nu = 0.3$ et un module de Young $E = 69$ GPa, ce matériau est du verre. Le domaine est discrétisé par des éléments à neuf nœuds et est constitué de 216 éléments pour un total de 1014 nœuds frontières. La fissure est circulaire et horizontale placée au centre dans le domaine. Elle est discrétisée en 16 éléments pour un total de 288 nœuds. La dimension de la fissure et du domaine dépend des paramètres r et h précisés ci-dessous. La densité de charge constante et uniforme appliquée est $\sigma = 10^{-2}$ GPa. Les faces latérales du domaine sont libres de contrainte le centre du domaine est contraint au déplacement axial les faces supérieure et inférieure sont soumises à une traction uniforme.

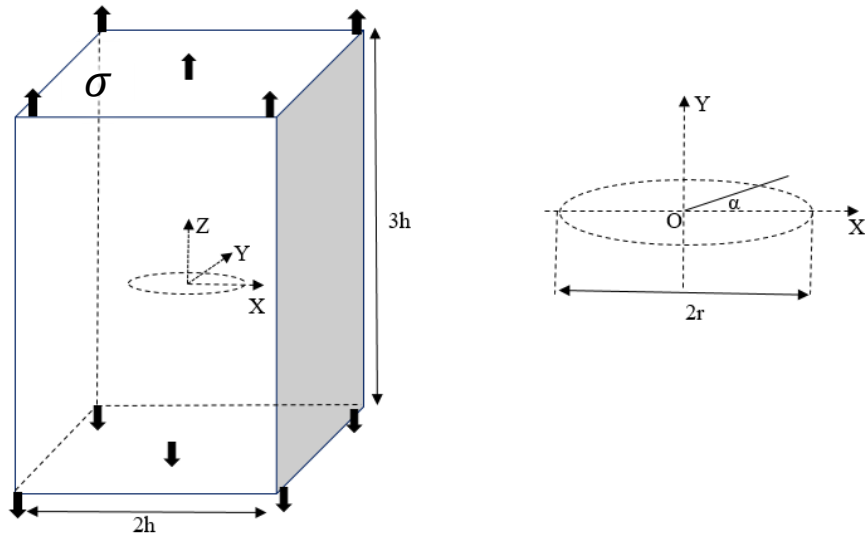


Figure 2: Géométrie du domaine homogène

Nous appliquons une charge uniforme σ sur les faces supérieure et inférieure les faces latérales sont libres de mouvement. Les résultats sont présentés dans la suite. Le repère cartésien associé ($O X Y Z$) est centré dans le domaine.

La contrainte appliquée et la déformation sont proportionnelles et sont reliées par la relation suivante :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (13)$$

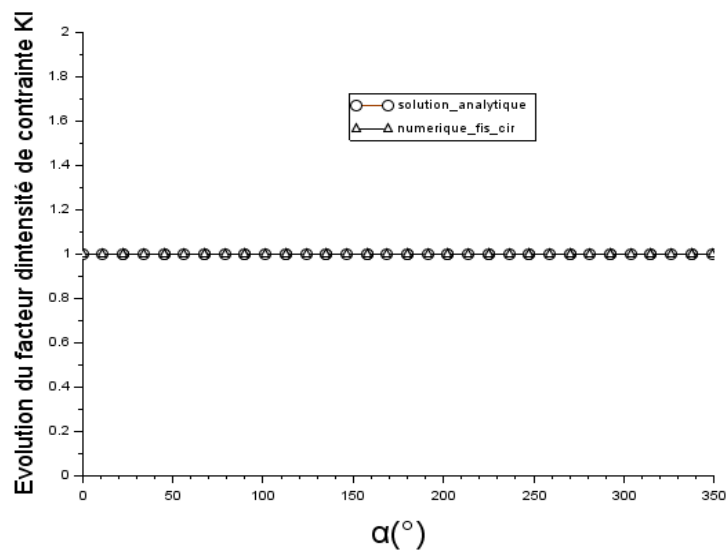


Figure 3: validation numérique en traction simple

La figure 4 permet de dire que les résultats numériques concorden avec la solution analytique de Sneddon. L'erreur relative entre la valeur numérique maximale du KI et la solution de Sneddon est inférieure à 1% (Ian Naismith Sneddon [27]; Ian N. Sneddon [28]).

2.2. Étude d'un domaine homogène et d'un multicouche

La méthode développée permet de traiter les problèmes liés aux solides élastiques fissurés. Nous avons fait une extension aux domaines multicouches ; ainsi pour se faire il a fallu considérer une continuité de déplacement au niveau des interfaces (frontière séparant les différentes sous couches). La méthode de calcul reste la même que pour un domaine homogène. Dans la suite nous allons d'abord faire une étude dans laquelle nous considérons deux domaines (homogène et multicouche) soumis à une flexion quatre points dans lesquels est enterrée une fissure elliptique. L'analyse des résultats se fera à travers les facteurs d'intensité de contrainte récoltés le long du front de fissure.

Le domaine homogène est discrétisé en 704 éléments repartis en 3094 nœuds. Les paramètres matériau sont un coefficient de poisson $\nu = 0.3$ et un module de Young $E = 260$ GPa. La figure 5 représente la géométrie de la fissure et du domaine d'étude. Pour le multicouche, chaque sous couche est discrétisée en 320 éléments pour 1462 nœuds frontières. Les paramètres du matériau sont identiques pour toutes les couches. Le coefficient de poisson est $\nu = 0.3$ et le module de Young est $E = 260$ GPa, ce matériau correspond à un alliage fait à partir de fer et d'aluminium. On applique une compression sur la face supérieure, la face inférieure est en appui plan aux extrémités ; les faces latérales sont libres de mouvement.

Les distances l_1 et l_2 sont telles que $l_2 < l_1$.

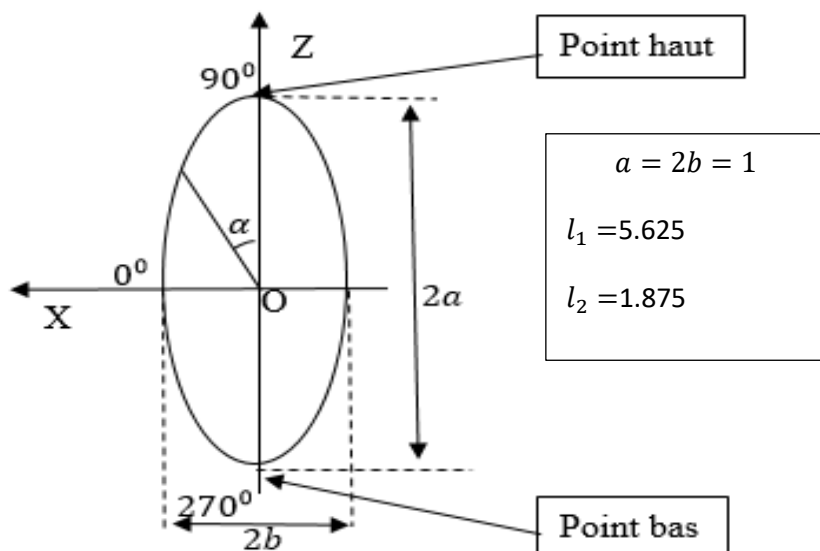


Figure 4: Géométrie de la fissure

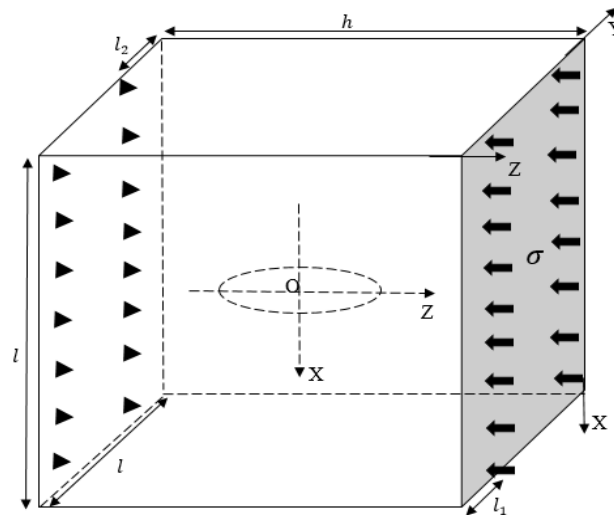


Figure 5: Géométrie du domaine homogène

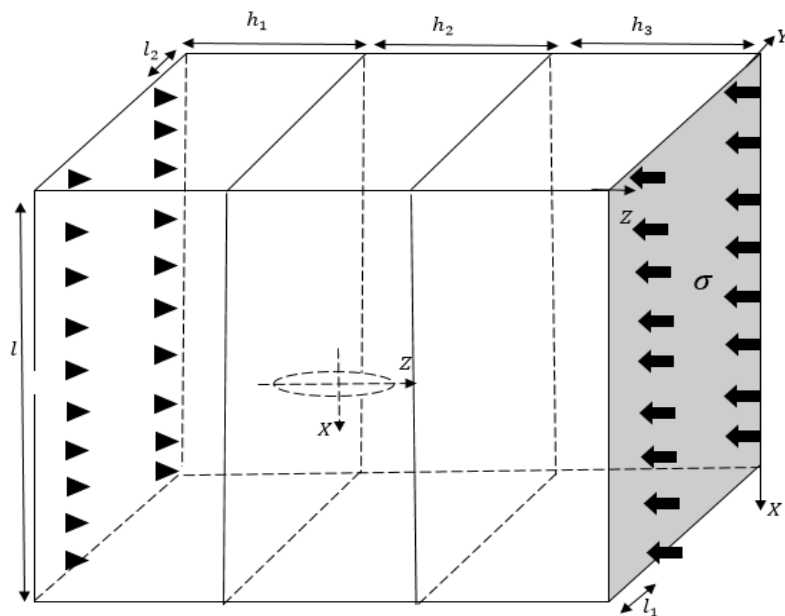


Figure 6: Géométrie du multicouche

Pour des raisons de symétrie on représente une partie du front de fissure suivant le balayage angulaire $[90^0 ; 270^0]$. La fissure occupera successivement la position centrée dans les trois couches. Les résultats obtenus dans les deux domaines sont présentés. Pour le type de sollicitation étudiée nous notons que les trois modes ne sont pas activés simultanément seul le mode d'ouverture I est activés dans les trois positions de la fissure dans le domaine sollicité. Les résultats sont présentés comme suite.

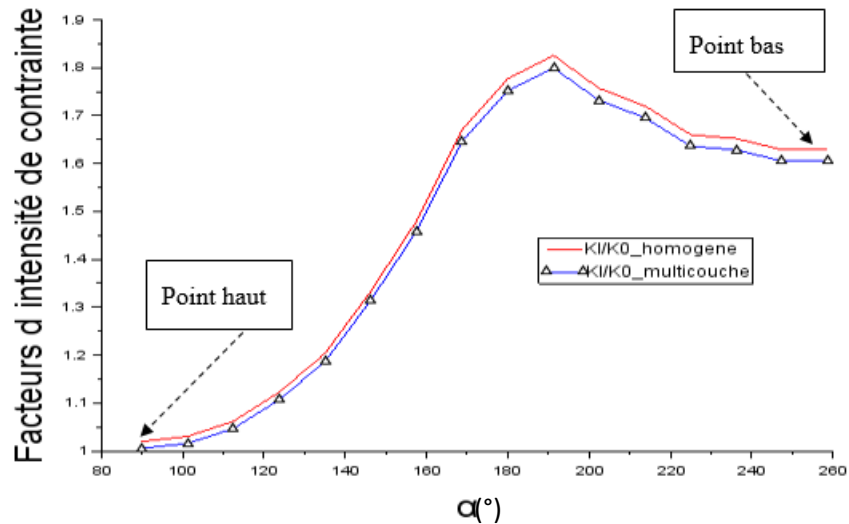


Figure 7: Fissure elliptique placée dans la couche 1 et comportement des facteurs d'intensité de contrainte

Dans le cas où la fissure est placée dans la couche du bas on observe une ouverture totale du front de fissure. Il y'a un bon accord (Figure 8) entre le cas homogène et le multicouche ce résultat montre que pour ce cas et cette position donnée la méthode traite bien les problèmes de fissuration dans le multicouche.

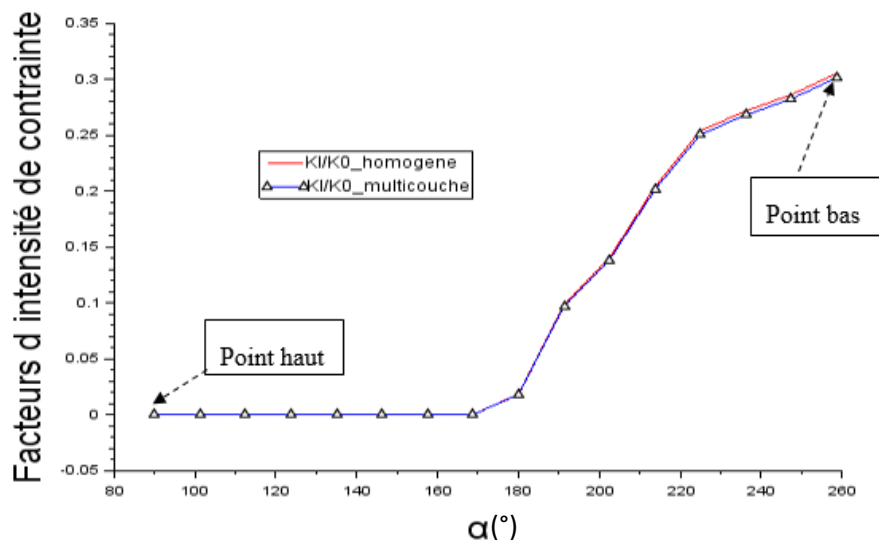


Figure 8: Comportement des facteurs d'intensité de contrainte pour une fissure elliptique placée dans la couche2

Le résultat obtenu lorsque la fissure se trouve dans la couche du milieu montre que pour les deux domaines considérés la fissure est partiellement ouverte et il y'a un bon accord entre les deux résultats présentés. Ce résultat permet de montrer l'efficacité de la méthode à traiter les cas de fissuration partiellement ouverte. En effet les sauts de déplacement au niveau des lèvres de la fissure sont bien représentés et pris en compte dans la modélisation.

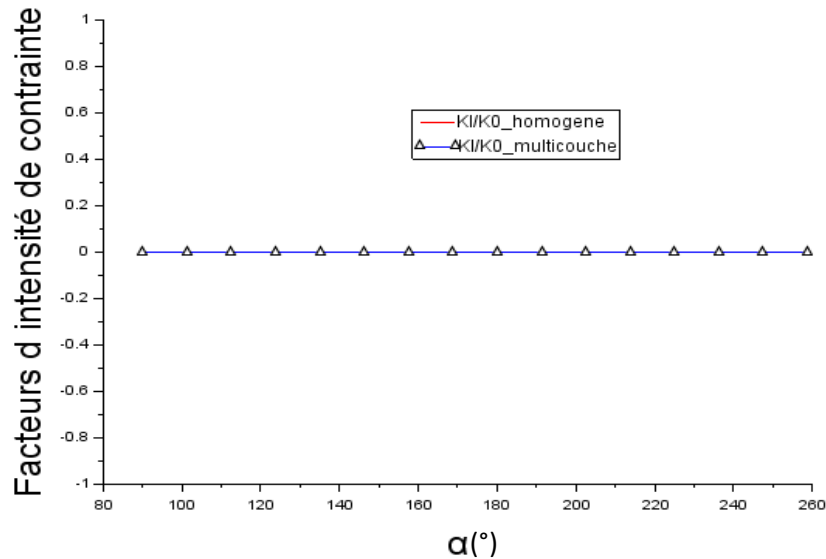


Figure 9: Comportement des facteurs d'intensité de contrainte pour une fissure elliptique placée dans la couche 3.

Pour les deux cas homogène et multicouche lorsque la fissure est placée dans la couche du haut elle reste fermée cela s'explique par le fait que dans le domaine d'étude les fibres supérieures subissent une compression tandis que les fibres inférieures sont tendues. Il y'a un bon accord entre les résultats des deux domaines.

2.3. Etude de l'influence de l'interface

Dans cette partie la sollicitation étudiée est toujours la flexion quatre points, nous nous intéressons à l'influence des interfaces sur l'évolution des facteurs d'intensités de contrainte. La densité de charge uniforme appliquée dans cette partie est plus importante que dans le cas précédent ; en effet cela a été judicieusement ait pour pouvoir mieux appréhender l'impact des interfaces sur la fissure lorsqu'elle est aux abords des interfaces qui jouent le rôle de frontières entre les différentes couches du multicouche. La fissure est discrétisée en 48 éléments repartis en 432 nœuds. Chaque couche du multicouche est discrétisée en 192 éléments repartis en 918 nœuds frontières ; le repère cartésien associé est centré. Il faut noter que dans ce cas, pour un milieu homogène, le plan neutre est le plan $z = 0$. Les fibres matérielles situées au-dessus de ce plan sont comprimées tandis que celles en dessous sont tendues.

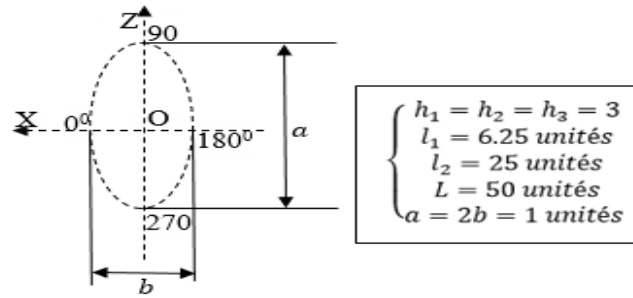


Figure 10: Géométrie de la fissure

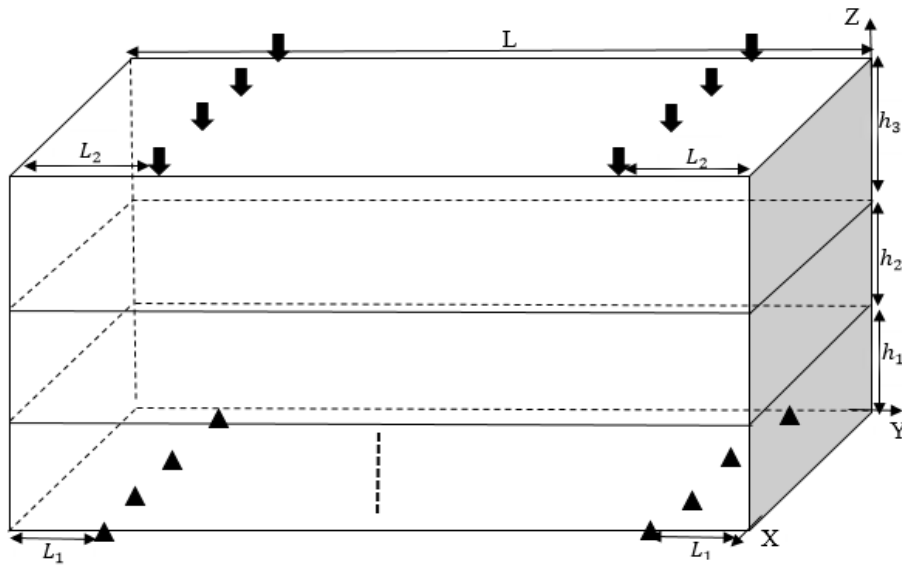


Figure 11: Géométrie du domaine

Le multicouche étudié présente des propriétés mécaniques différentes. Nous nous sommes limités à deux profils pour notre étude représentés ci-dessous.

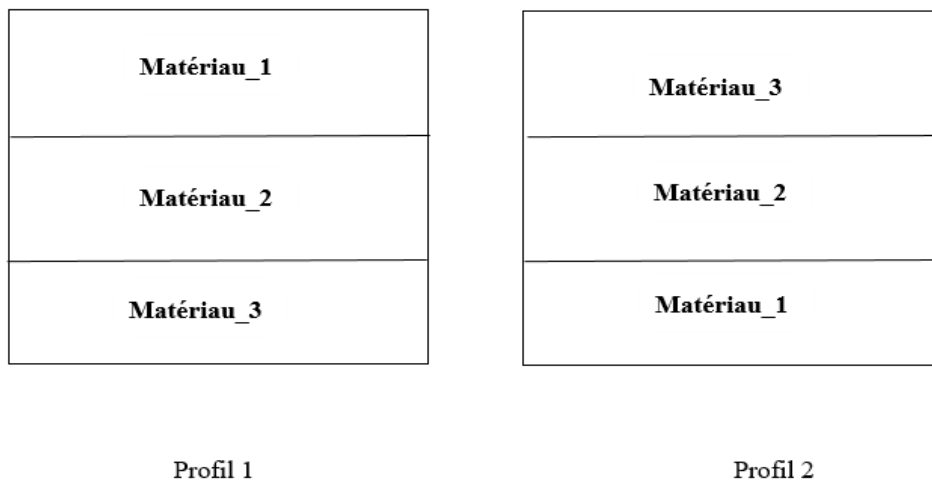


Figure 12: Profil du multicouche suivant les propriétés mécaniques des sous couches.

Dans cette partie, on s'intéresse à la couche du bas, pour ce faire on va considérer les deux profils présentés ci-dessus ayant trois couches afin de mettre en évidence l'impact de la nature de la couche et de l'interface sur l'évolution d'une fissure. Les paramètres physiques des matériaux utilisés sont donnés dans le tableau suivant (Tableau 1) :

	Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson
Matériau_1	260	0.3
Matériau_2	113	0.42
Matériau_3	450	0.3

Tableau 1: Paramètres physiques des matériaux utilisés.

Le profil 1 et le profil 2 présentent deux configurations possibles du multicouche où le matériau de la couche du milieu ne change pas. Pour les deux autres couches on a un cas où le matériau le plus rigide est placé dans la couche du bas et le moins rigide des deux dans la couche du haut, c'est le profil 1 et le dernier cas où le matériau le moins rigide est placé dans la couche du bas et le matériau le plus rigide dans la couche du haut c'est le profil 2. En plus de travailler en milieu hétérogène nous varions la position de la fissure dans le domaine suivant les trois cas présentés ci-dessous. Dans cette partie nous allons nous intéresser à la couche du bas car pour la sollicitation étudiée cette couche est le lieu où les contraintes sont les plus grandes. Les résultats des simulations sont présentés dans la suite.

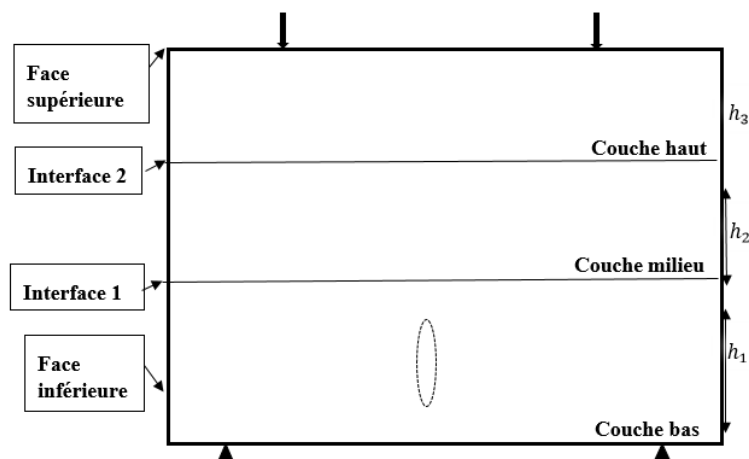
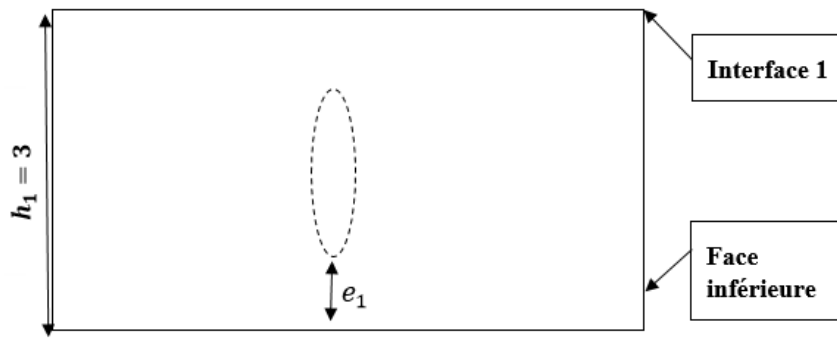


Figure 13: Position de la fissure dans la couche du bas.

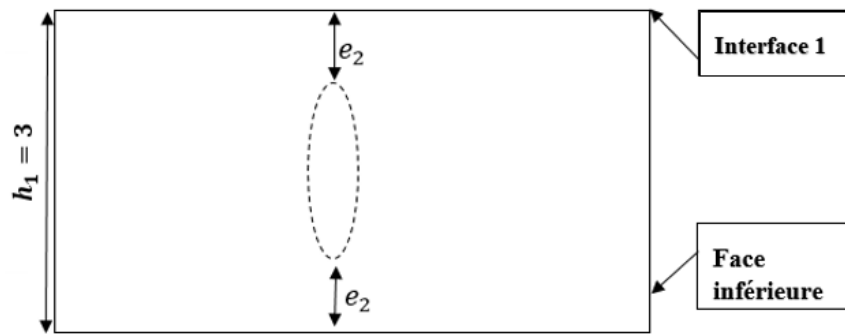
La fissure occupe trois positions différentes dans chaque sous couche, et ces trois positions sont représentées dans la figure 15.

Cas1 : la fissure est proche de la face inférieure



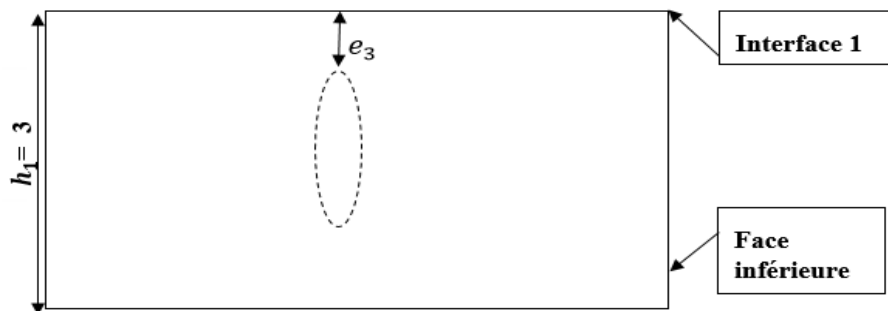
e_1 : La distance entre la fissure et l'interface ($e_1 = 0.02$ unités)

Cas 2 : la fissure est centrée dans la couche du bas



e_2 : La distance entre la fissure et l'interface ($e_2 = 0.5$ unités)

Cas 3 : la fissure est rapprochée de l'interface 1



e_3 : La distance entre la fissure et l'interface 1 ($e_3 = 0.02$ unités)

Figure 14: Différentes positions de la fissure dans la couche

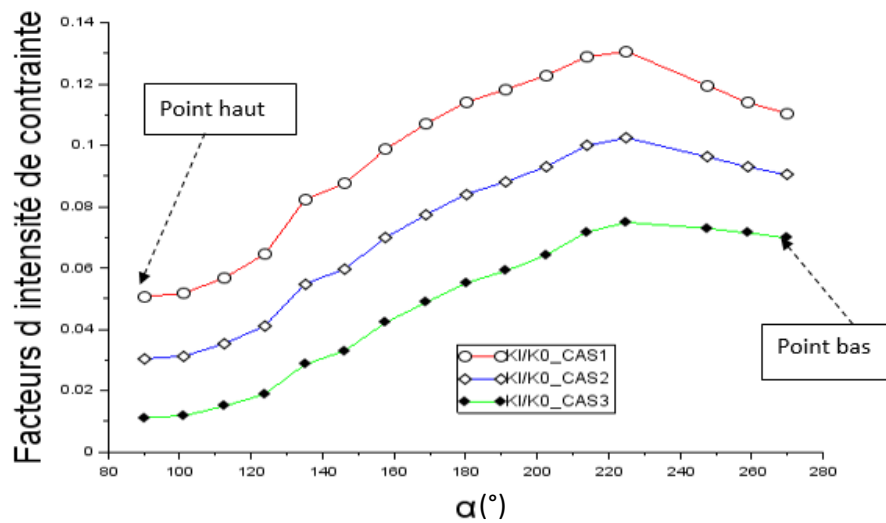


Figure 15: Comportement des facteurs d'intensité de contrainte lorsque le multicouche est dans le profil 1

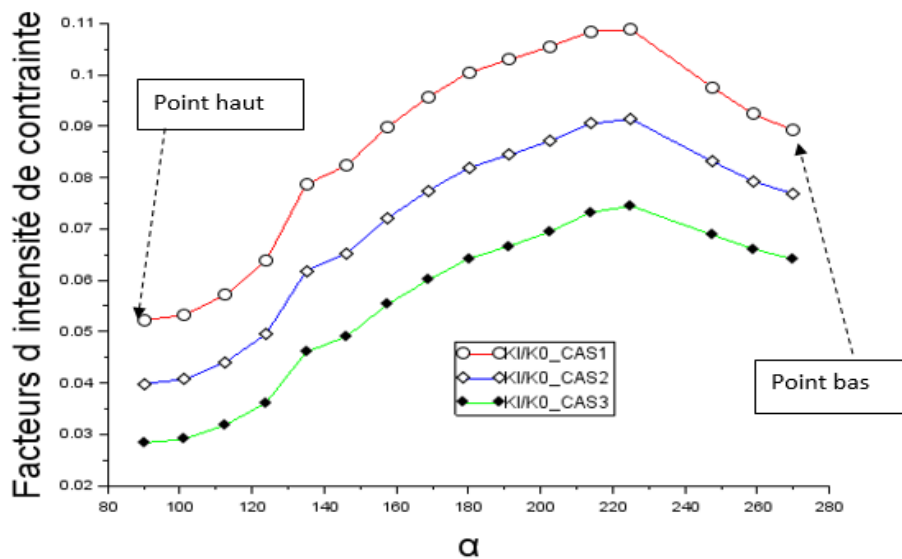


Figure 16: Comportement des facteurs d'intensité de contrainte lorsque le multicouche est dans le profil 2

Avec le profil 1 (Figure 16), la fissure s'ouvre totalement le constat que nous faisons est que le rapprochement de la fissure aux interfaces influence les valeurs du K_I . Il faut noter que les valeurs de K_I sont plus grandes pour le cas où la fissure est plus proche de la face inférieure. L'effet de bord dans ce cas n'a pour action que d'atténuer l'évolution de l'ouverture du front. L'exemple traité comparé au cas où le multicouche a des propriétés mécaniques identiques (cas homogène) montre bien que le maximum repéré sur la courbe montrant l'évolution du K_I change de point il est du point de vu angulaire à la position 225° contrairement à 190° pour le cas homogène. La différence de propriétés mécaniques des couches dans le profil 1 est mise en

évidence par ce résultat. Il faut noter aussi que pour le cas homogène le rapport (K_I/K_0) a pour maximum 1.9 dans le cas 2. Pour la même position dans le cas où le matériau se retrouve dans le profil 1 la valeur du rapport (K_I/K_0) a pour maximum 0.09. Remarquons que ce résultat permet d'observer l'influence de la nature de la couche. Ainsi pour les résultats obtenus la fissure serait dans une configuration plus stable si elle se retrouvait dans le profil 1 par rapport au cas homogène.

La figure 17 montre le comportement du front de fissure lorsque le multicouche se trouve dans le profil 2. La différence entre ce profil et celui précédent est que dans ce cas la couche la plus rigide est la couche supérieure et celle la moins rigide des couches externes est celle du bas au regard de la nature de la sollicitation et de la position du plan d'équilibre. Ce résultat est influencé par la nature des couches externes en grande partie et naturellement aussi par la position de la couche dans le domaine. Il ressort de notre étude que pour un multicouche à trois couches ayant des paramètres matériaux différents lorsque la fissure est placée dans la couche du bas le profil dans lequel la fissure présente un K_I plus faible reste le profil 2 par rapport au profil 1.

Conclusion

Dans ce papier nous avons développé une méthode basée sur les éléments de frontières permettant de traiter les problèmes rencontrés en mécanique linéaire de rupture. La validation numérique s'est faite en résolvant numériquement le problème de Sneddon pour un massif infini dans lequel est enterrée une fissure circulaire. Fort de ce résultat nous avons fait une extension aux multicouches. Nous avons considéré un multicouche de trois sous couches et à travers l'étude de la flexion quatre points appliquée aux domaines d'étude l'analyse des facteurs d'intensités de contrainte a permis de montrer qu'il y'a un bon accord entre les résultats du domaine homogène et ceux du multicouche. Nous avons expérimenté notre méthode sur un domaine hétérogène et à travers les facteurs d'intensité de contrainte nous avons pu analyser et prédire le comportement d'une fissure enterrée dans le domaine sollicité.

Dans la suite de nos travaux nous pensons approfondir l'étude des milieux hétérogènes qui sont rependus dans l'ingénierie de nos jours (matériaux composites).

Références

- [1] F.C. Franck, R.B. Lawn, (1967), « On the theory of Hertzian fracture », Proc Roy Soc a; p. 299-291.
Doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1967.0137>
- [2] R. Mouginot, D. Maugis, (1985), « Fracture indentation beneath flat and spherical punches. », J. Mater Sci; Vol 20, p. 4354–4376.
Doi: <https://doi.org/10.1007/BF00559324>
- [3] R. Mouginot, (1987), « Crack formation beneath sliding spherical punches. », J. Mater Sci; Vol 22, p. 989–1000.
Doi: <https://doi.org/10.1007/BF01103541>
- [4] M.B. Bush, (1999), « Simulation of contact-induced fracture. », Eng. Anal. Bound Elem; Vol. 23, p. 59-66.
Doi: [https://doi.org/10.1016/S0955-7997\(98\)00061-7](https://doi.org/10.1016/S0955-7997(98)00061-7)

- [5] K. Komvopoulos, (1996), « Subsurface crack mechanisms under indentation loading. Wear. », WEAR, Vol 199, p 9-23.
Doi : [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(96\)06954-2](https://doi.org/10.1016/0043-1648(96)06954-2)
- [6] H.J. Choi, (2001), « Effects of graded layering on the tip behavior of vertical crack in a substrate under frictional Hertzian contact. », Engng Fract Mech; Vol 68, p. 1033-1059.
Doi: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(01\)00003-0](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(01)00003-0)
- [7] T.A. Cruse, W. Vanburen, (1971), « Three-dimensional stress analysis of a fracture specimen with an edge cracks. », Int J Fract; Vol 71(1), p. 1-15.
Doi : <https://doi.org/10.1007/BF00236479>
- [8] Y. Mi, M.H. Aliabadi, (1992), « Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. », Engng Anal Bound Elem; Vol 10, p. 161-171.
Doi: [https://doi.org/10.1016/0955-7997\(92\)90047-B](https://doi.org/10.1016/0955-7997(92)90047-B)
- [9] J. Dominguez, M.P. Ariza, R. Gallego, (2000), « Flux and traction boundary elements without hypersingular or strongly singular integrals. », Int J Numer Meth Engng, Vol. 48, p. 111–135.
Doi:
[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(20000510\)48:1<111::AID-NME870>3.0.CO;2-Y](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(20000510)48:1<111::AID-NME870>3.0.CO;2-Y)
- [10] A. Young, (1996), « A single-domain boundary element method for 3-D electrostatic crack analysis using continuous elements. », Int J Numer Meth Engng; Vol 39, p. 1265- 1293.
Doi:
[https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960430\)39:8<1265::AID-NME902>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960430)39:8<1265::AID-NME902>3.0.CO;2-N)
- [11] M. Bonnet, (1999), « Stability of crack fronts under Griffith criterion: a computational approach using integral equations and domain derivatives of potential energy.», Comp Meth Mech Engng; Vol 173, p. 337-364.
Doi: [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(98\)00290-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00290-4)
- [12] Aliabadi M.H. (1997), « A new generation of boundary methods in fracture mechanics.», Int J Fract; Vol 86, p. 91–125.
Doi: <https://doi.org/10.1023/A:1007381025099>
- [13] Man KW, Aliabadi MH, Rooke DP. (1993), « Analysis of contact friction using the boundary element method.», dans Aliabadi MH, Brebbia CA, editors. Computational methods in contact mechanics. Elsevier; R. Kouitat Njiwa, J. von Stebut / Engineering Fracture Mechanics 71 (2004) 2607–2620 2619
- [14] Dandekar B.W., Conant R.J. (1992), « Numerical analysis of contact problems using boundary integral equation method. Part I and II.», Int J Numer Meth Engng; Vol 33, p 1513-1535.
Doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620330711>
- [15] Takahashi S, Brebbia CA. (1993), « Elastic contact analysis with friction using the boundary elements flexibility approach.», dans Aliabadi MH, Brebbia CA, editors. Computational methods in contact mechanics. Elsevier.
- [16] O. A. Olukoko, A.A. Becker, (1993), « A new boundary element approach for contact problems with friction. », Int J Numer Meth Engng; Vol 36, p. 2625-2642.
Doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620361508>
- [17] G. Karami (1993), « Boundary element analysis of two-dimensional elastoplastic contact problems. », Int J Numer Meth Engng; Vol. 36, p. 221-235.
Doi: <https://doi.org/10.1002/nme.1620360204>
- [18] A. P. Cisilino, M. H. Aliabadi, (1999), « Three-Dimensional Boundary Element Analysis of Fatigue Crack Growth in Linear and Nonlinear Fracture Problems », Engineering Fracture Mechanics, Vol. 63, p. 713–733.
Doi: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(99\)00047-8](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(99)00047-8)

- [19] C. A. Brebbia, J. Dominguez, (1992), *Boundary Elements: An Introductory Course*, Computational Mechanics Publications, Wit Press.
- [20] M. Bonnet, (1999), « *Boundary Integral Equation Methods for Solids and Fluids* », John Wiley and Sons, New York.
- [21] R. Kouitat Njiwa, J. von Stebut, (2004), « *Three-Dimensional Boundary Element Analysis of Internal Cracks under Sliding Contact Load with a Spherical Indenter* », *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 71, p. 2607–2620.
Doi: <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2004.02.008>
- [22] M. Ameen, B. K. Raghuprasad, (1994), « *A Hybrid Technique of Modelling of Cracks Using Displacement Discontinuity and Direct Boundary Element Method* », *Int. J. Fract.*, Vol. 67, p. 343–355.
- [23] N. Elvin, C. Leung, (1999), « *A Fast-Iterative Boundary Element Method for Solving Closed Crack Problems* », *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 63(5), p. 631–648,
Doi: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(99\)00035-1](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(99)00035-1)
- [24] J. C. De Bremaecker, M. C. Ferris, D. Ralph, (2000), « *Compressional Fractures Considered as Contact Problems and Mixed Complementarity Problems* », *Engng. Fract. Mech.*, Vol. 66, p. 287–303.
Doi: [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(00\)00022-9](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(00)00022-9)
- [25] P. W. Christensen, A. Klarbing, J. S. Pang, N. Strömberg, (1998), « *Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems* », *Int. J. Numer. Meth. Engng.* Vol. 42(1), p. 145–175.,
Doi: [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19980515\)42:1<145::AID-NME358>3.0.CO;2-L](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19980515)42:1<145::AID-NME358>3.0.CO;2-L)
- [26] Martin Schwartz. (2018), « *Contribution à la résolution de problèmes tridimensionnels de fissuration fragile. Vers l'utilisation d'un modèle non-local de comportement élastique* », Université de Lorraine, Français. NNT: 2018LORR0031. Tel-01749198
- [27] Sneddon, Ian Naismith. (1946), « *The Distribution of Stress in the Neighborhood of a Crack in an Elastic Solid* ». *Proc. R. Soc. Lond. A* 187 (1009)229-60.
- [28] Sneddon, Ian N. (1969), « *Transform Solutions of Crack Problems in the Theory of Elasticity* » *ZAMM*, Vol 49, p. 15-23.
Doi: <https://doi.org/10.1002/zamm.19690490104>